

Wellen im anisotropen Festkörper nach dem Impulskonzept.

O. Bschorr

Aeroakustik, Stuttgart

Zusammenfassung

Der anisotrope Festkörper wird durch einen dyadischen Elastizitätsmodul charakterisiert und dessen symmetrische Komponente der Longitudinal- und die antisymmetrische der Transversalwelle zugeordnet. Im Weiteren wird die konventionelle Cauchy-Kräftebilanz durch eine Impulsbilanz ersetzt. Danach liegen die „slowness“-Vektoren für beide Wellenarten auf den von den Hauptachsen und –werten aufgespannten Ellipsoiden. Der Strahlengang jedoch ist nicht geradlinig, sondern hat eine Snellius - Brechung hin zur Achse mit der kleinsten Wellengeschwindigkeit.

Einleitung. Aufgabenstellung.

Aufgabe ist die Wellenausbreitung im homogenen, anisotropen Kontinuum. Da bei Deviationswellen das klassische Cauchy-Kräftegleichgewicht versagte, [5] wird dazu hypothetisch auf eine Impulsbilanz umgestellt und die vierstufige Voigt'sche Elastizitäts-Tetrade auf einen zweistufigen Tensor reduziert. Damit sollen experimentell nachprüfbar Welleneigenschaften angesagt werden.

Modell. Annahmen.

Bezeichnungen: Vorgegeben ist ein anisotroper Festkörper mit den Koordinaten x_i, y_j, z_k [m]. Um die Wellenbewegung an einem beliebigen Referenzpunkt $\mathbf{O}(x, y, z)$ zu beschreiben, werden zusätzlich die in \mathbf{O} fixierten lokalen Koordinaten $\xi, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ des begleitenden Dreibeins eingeführt. Eine Planwelle der Frequenz ω [rad/s] und der Wellenzahl k [rad/m] verlaufe mit der – bei Verlustfreiheit - reellen Geschwindigkeit $\mathbf{c} = c\mathbf{t}$ [m/s] in $\xi\mathbf{t}$ -Richtung und habe die Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi, t)$ [m]. (t [s] = Zeit, \mathbf{t} [-] = Bahntangente)

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} \sin(\omega t - k\xi) \quad \nabla \xi = \mathbf{t} \quad (1)(2)$$

Die Amplitude \mathbf{a} [m] zeigt bei Longitudinalwellen (L) in Richtung der Bahntangente \mathbf{t} und bei Transversalwellen (T) in die dazu Senkrechte \mathbf{it} und liegt in der von der Normalen \mathbf{n} und der Binormalen \mathbf{b} aufgespannten Ebene. ($i = \sqrt{-1}$). Damit werden die Schnellen $\partial \mathbf{s} / \partial t = \mathbf{v}_{L,T}$ [m/s] und die Gradienten $\nabla \mathbf{s}_{L,T}$ von longitudinaler und transversaler Planwelle:

$$\mathbf{v}_L = \omega \mathbf{t} \cos(\omega t - k\xi) \quad \nabla \mathbf{s}_L = -k \mathbf{t} \mathbf{t} \cos(\omega t - k\xi) \quad (3)(4)$$

$$\mathbf{v}_T = i \omega \mathbf{t} \cos(\omega t - k\xi) \quad \nabla \mathbf{s}_T = -i k \mathbf{t} \mathbf{t} \cos(\omega t - k\xi) \quad (5)(6)$$

Elastizitätstensor: Das anisotrope Kontinuum wird durch einen zweistufigen Elastizitätstensor \mathbf{E} [Pa] beschrieben. Die Voigt'sche Notation mit dem a priori-Ausschluss von asymmetrischen Tensoren beruht auf dem fach- und sachfremden Boltzmann-Axiom und wird nicht übernommen: Es ist konformer, die stringente Tensor-Theorie beizubehalten und das Fehlen einer Spannungskomponente über einen Null-Koeffizienten darzustellen. Als nächstes wird aus dem Elastizitätsmodul \mathbf{E} die symmetrische, longitudinale Komponente \mathbf{E}_L abgetrennt und via Säkulargleichung ohne Ein-

schränkung der Allgemeinheit auf die 3 Diagonalterme E_x, E_y, E_z reduziert. Die weitere Berechnung verkürzt sich, wenn auch der zur Transversalwelle gehörende asymmetrische Elastizitätsmodul diagonalisiert wird. Dies führt auf die imaginären Koeffizienten $i\mathbf{E}_T = i\{G_x, G_y, G_z\}$. Vereinbart wird die Größenstaffelung $E_x \geq E_y \geq E_z$ und $G_x \geq G_y \geq G_z$.

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) = E_x \mathbf{ii} + E_y \mathbf{jj} + E_z \mathbf{kk} \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_T = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^T) = i[G_x \mathbf{ii} + G_y \mathbf{jj} + G_z \mathbf{kk}] \quad (8)$$

Rein formal lässt sich \mathbf{E}_L in den isotropen - $E_0 \mathbf{U}$ und den spurfreien, deviatorischen Tensor $\{\mathbf{E}\}$ separieren; ebenso \mathbf{E}_T in $iG_0 \mathbf{U}$ und $\{i\mathbf{G}\}$. ($\mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} =$ Einheitstensor)

$$\mathbf{E}_L = E_0 \mathbf{U} + \{(E_x - E_0) \mathbf{ii} + (E_y - E_0) \mathbf{jj} + (E_z - E_0) \mathbf{kk}\} \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_T = iG_0 \mathbf{U} + i\{(G_x - G_0) \mathbf{ii} + (G_y - G_0) \mathbf{jj} + (G_z - G_0) \mathbf{kk}\} \quad (10)$$

Im Anhang wird der Vermutung nachgegangen, ob $\{\mathbf{E}\}$ die longitudinale und $\{i\mathbf{G}\}$ die transversale Hauptform desselben Deviators sind. Bei Konvergenz mit $E_{xyz} \rightarrow E_0$ bzw. $G_{xyz} \rightarrow G_0$ geht der anisotrope in den isotropen Festkörper mit dem Young-Modul E_0 bzw. dem Schermodul G_0 über

$$E_0 = \frac{1}{3}(E_x + E_y + E_z) \quad G_0 = \frac{1}{3}(G_x + G_y + G_z) \quad (11)(12)$$

Gemäß der Hooke'schen Proportionalität konstituieren die Module $\mathbf{E}_{L,T}$ zusammen mit den Gradienten $\nabla \mathbf{s}_{L,T}$ (4)(6) den longitudinalen und transversalen Spannungstensor $\mathbf{T}_{L,T}$ [Pa]

$$\mathbf{T}_L = \mathbf{E}_L \cdot \nabla \mathbf{s}_L \quad \mathbf{T}_T = \mathbf{E}_T \cdot \nabla \mathbf{s}_T \quad (13)(14)$$

Impulsleichgewicht: Es wird auf die von der Karlsruher Schule [3,4] eingeführte Impulseinheit $Hy = mkg/s$ zurückgegriffen. Bei einer Dichte ρ [kg/m³] und der Schnelle \mathbf{v} [m/s] am Raumpunkt \mathbf{O} besteht ein spezifischer Impuls $\rho \mathbf{v}$ [Hy/m³] und bei einer Fortleitung mit der Wellengeschwindigkeit \mathbf{c} liefert das dyadische Produkt $\mathbf{c} \mathbf{v}$ der beiden Geschwindigkeitsvektoren den kinetischen Impulsfluss $\rho \mathbf{c} \mathbf{v}$ [Hy/sm²]. Nach der in [5] eingeführten Hypothese wird in \mathbf{O} zwischen dem kinetischen Impulsfluss $\rho \mathbf{c} \mathbf{v}$ und dem durch den Spannungstensor \mathbf{T} [Pa = Hy/sm²] gegebenen potentiellen Impulsfluss das lokale Gleichgewicht angesetzt:

$$\rho \mathbf{c} \mathbf{v}_L + \mathbf{T}_L = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \rho \mathbf{c} \mathbf{v}_L + \mathbf{E}_L \cdot \nabla \mathbf{s}_L = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\rho \mathbf{c} \mathbf{v}_T + \mathbf{T}_T = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \rho \mathbf{c} \mathbf{v}_T + \mathbf{E}_T \cdot \nabla \mathbf{s}_T = \mathbf{0} \quad (16)$$

Longitudinalwelle.

Wellengeschwindigkeit. In die allgemeine Wellengleichung (15) die für die Longitudinalwelle maßgebende Schnelle \mathbf{v}_L , (3) Gradienten $\nabla \mathbf{s}_L$ (4) und Elastizitätstensor \mathbf{E}_L (9) eingesetzt liefert die Ausgangsgleichung

$$\rho \mathbf{c} \mathbf{v}_L + \mathbf{E}_L \cdot \nabla \mathbf{s}_L = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \rho c \omega \mathbf{t} \mathbf{t} - k \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{t} \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (17)$$

und nach doppelskalärer Multiplikation mit $\mathbf{t} \mathbf{t}$ die longitudinale Wellengeschwindigkeit $c_L = c(\mathbf{t}) = c$ in \mathbf{t} -Richtung

$$c^2 \equiv c \omega / k = \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{t} \mathbf{t} / \rho = [E_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{t})^2 + E_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{t})^2 + E_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{t})^2] / \rho \quad (18)$$

Dem in Hauptachsenform vorgegebenen E_L -Modul entsprechend haben die Sonderfälle in denen die Wellenrichtung \mathbf{t} identisch einer der Hauptachsen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ist, die drei Hauptgeschwindigkeiten $c_{x,y,z}$

$$c_x = \sqrt{E_x/\rho} \quad c_y = \sqrt{E_y/\rho} \quad c_z = \sqrt{E_z/\rho}. \quad (19)$$

Mit der Identität $\mathbf{t} = t_x\mathbf{i} + t_y\mathbf{j} + t_z\mathbf{k} \rightarrow xi + yj + zk$ erhält man die Wellengeschwindigkeit in x,y,z -Koordinaten. Im 2. Gleichungsteil (20) mit der Umstellung nach $c_{xyz} \equiv 1/c_{xyz}^{-1}$ erkennt man die Ellipsoid-Gleichung mit den 3 reziproken Hauptgeschwindigkeiten – der „slowness“ - $c_x^{-1}, c_y^{-1}, c_z^{-1}$ als Ellipsenachsen. (Fig. 1). Für eine spätere Verwendung wird auch der Gradient $\nabla c/c$ bereitgestellt. ($\nabla x = \mathbf{i}; \nabla y = \mathbf{j}; \nabla z = \mathbf{k}$)

$$c^2 = (xc_x)^2 + (yc_y)^2 + (zc_z)^2 \equiv (x/c_x^{-1})^2 + (y/c_y^{-1})^2 + (z/c_z^{-1})^2$$

$$\nabla c/c = (xc_x)\mathbf{i} + (yc_y)\mathbf{j} + (zc_z)\mathbf{k} \quad \uparrow(20)(21)$$

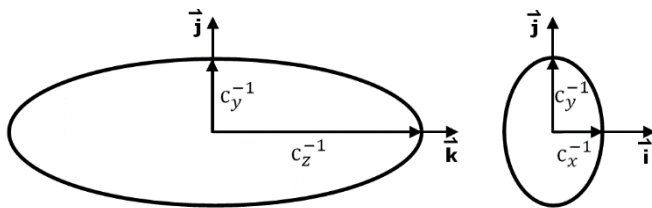


Fig. 1 Slowness-Ellipsoid. In einem anisotropen Festkörper liegt die von der Richtung abhängige reziproke Longitudinalwellengeschwindigkeit $1/c$ – die slowness – auf einem Ellipsoid mit den 3 Hauptachsen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ und den Hauptwerten $c_x^{-1}, c_y^{-1}, c_z^{-1}$. Der Vereinbarung $E_x \geq E_y \geq E_z$ entsprechend ist $c_z^{-1} \geq c_y^{-1} \geq c_x^{-1}$.

Strahlenkrümmung. Bei einer ortsabhängigen Inhomogenität mit dem Gradienten der Wellengeschwindigkeit $\nabla c/c$ bewirkt die Snellius-Brechung bekanntlich einen gekrümmten Strahlengang mit dem Krümmungsvektor $\gamma = \mathbf{b}/R$ [1/m] bzw. dem Krümmungsradius \mathbf{R} [m]: [5].

$$\gamma = \mathbf{t}x\nabla c/c = \mathbf{b}/R \quad \mathbf{R} = \mathbf{n} R = [\mathbf{t}x\nabla c/c]^{-1} \quad (22)(23)$$

In einem anisotropen Festkörper besteht mit dem Gradienten $\nabla c/c \neq 0$ (21) eine richtungsabhängige Inhomogenität und eine Longitudinalwelle erfährt die Krümmung γ .

$$\gamma = \mathbf{t}x\nabla c/c = \mathbf{t} x [E_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{t})\mathbf{i} + E_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{t})\mathbf{j} + E_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t})\mathbf{k}]/c^2 \quad (24)$$

Stimmt die Wellenrichtung \mathbf{t} mit einer der Hauptachsen \mathbf{i}, \mathbf{j} und \mathbf{k} überein, so besteht eine krümmungsfreie, geradlinige Wellenausbreitung, $\gamma = \mathbf{0}$. Die Wellenrichtungen $\mathbf{t} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ sind jedoch instabil, da es zu einer Brechung von den größeren Geschwindigkeiten c_x und c_y weg, hin zur Achse \mathbf{k} mit der kleinsten Geschwindigkeit c_z kommt. (Fig. 2).

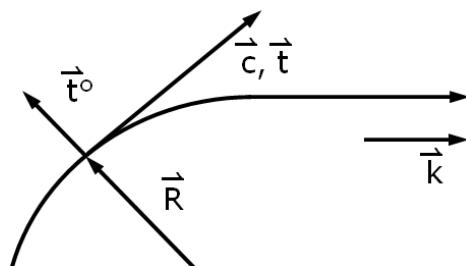


Fig. 2 Strahlenkrümmung. Die Anisotropie ist durch die in den Hauptrichtungen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ wirkenden Elastizitätsmodule E_x, E_y, E_z mit den zugeordneten 3 Hauptgeschwindigkeiten $c_{xyz} = \sqrt{E_{xyz}/\rho}$ bestimmt. Eine in \mathbf{t} -Richtung laufende Welle erfährt bei dem anisotropen Gradienten $\nabla c/c$ (21) eine Snellius-Krümmung $\gamma = \mathbf{t}x\nabla c/c$ hin zur Achse \mathbf{k} mit der kleinsten Geschwindigkeit $c_z < c_x, c_y$.

Transversalwelle.

Wellengeschwindigkeit. Die transversale Welle nach (5)(6) ergibt mit dem asymmetrischen Elastizitätsmodul E_T (8) die Wellengeschwindigkeit $c_T \rightarrow c$:

$$c^2 \equiv c\omega/k = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}\mathbf{t}/\rho = [G_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{t})^2 + G_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{t})^2 + G_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t})^2]/\rho \quad (25)$$

Auch bei der transversalen Welle liegen die „slowness“ – Vektoren $1/c$ auf einem Ellipsoid mit den 3 Hauptwerten

$$1/c_x = \sqrt{\rho/G_x} \quad 1/c_y = \sqrt{\rho/G_y} \quad 1/c_z = \sqrt{\rho/G_z}. \quad (26)$$

Beim Grenzübergang $G_x, G_y, G_z \rightarrow G_0$ geht das „slowness“-Ellipsoid über in eine Kugel entsprechend der isotropen Transversalgeschwindigkeit $c = \sqrt{G_0/\rho}$.

Anhang.

Elastizitätskoeffizienten. Die vierstufige Voigt'sche Elastizitätstetradate hat insgesamt $3^4 = 81$ Komponenten. Beim ganz überwiegenden Teil handelt es sich dabei um unwesentliche Winkelablagen zwischen den Koordinaten- und den tensoriellen Hauptachsen. Bei Wahrung der vollen Allgemeinheit ist es rationeller diese zur Deckung zu bringen, - in die Hauptachsen zu drehen - so dass die unwesentlichen Komponenten a priori nicht in Erscheinung treten. – Ein zweistufiger Tensor hat nominell $3^2 = 9$ Koeffizienten. Der symmetrische Teil reduziert sich von den 6 auf die 3 Diagonalglieder und beim asymmetrischen Teil legen 2 unwesentliche Winkel die Lage der Rotationsachse fest, so dass von den 9 nur 4 relevante Koeffizienten verbleiben. Bei dem Elastizitätstensor $E_L + E_T = E$ (9)/(10) sind dies E_{L0} und G_{T0} . Die zugeordneten Deviatoren $\{\mathbf{E}\}$ und $\{\mathbf{iG}\}$ mit den nominell 6 Zahlwerten reduzieren sich letztlich auf 2 relevante Kennwerte: Einmal wegen der Spurlosigkeit von $\{\mathbf{E}\}$ und $\{\mathbf{iG}\}$ und zum andern, weil beide Wellenarten demselben Deviator unterliegen. - Z.B besitzt der 2D-Deviator in der \mathbf{i}, \mathbf{j} -Ebene die longitudinale $[\mathbf{ii} - \mathbf{jj}] \rightarrow \{\mathbf{E}\}$ und die transversale $[\mathbf{ij} + \mathbf{ji}] \rightarrow \{\mathbf{G}\}$ Hauptform, die sich lediglich durch eine 45°-Drehung um die \mathbf{k} -Achse unterscheiden.

Imaginärer E-Modul. Die Berechnung der Transversalwelle im Komplexen stellt nur eine verkürzte Ersatzlösung dar, da keine passende Multiplikation von E_T und ∇_{ST} recherchiert werden konnte. Ein möglicher Ausweg ist, den Elastizitätsmodul \mathbf{E} durch eine 3x3-Matrix wiederzugeben und ein doppelskalares Produkt von Matrix und Tensor einzuführen.

Deviator. Der von den orthogonalen Koordinaten \mathbf{i}, \mathbf{j} gebildete 2D-Tensor \mathbf{ij} ist wegen $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$ antisymmetrisch und hat die Eigenschaft $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$. Für den transversalen Tensor $[\mathbf{ij} - \mathbf{ji}]$ besteht die Identität $[\mathbf{ij} - \mathbf{ji}] = \mathbf{ij} - (-\mathbf{ij}) = 2\mathbf{ij}$ und der Deviator $[\mathbf{ij} + \mathbf{ji}]$ erbringt die 'Annihilation' $[\mathbf{ij} + \mathbf{ji}] = \mathbf{ij} + (-\mathbf{ij}) \rightarrow \mathbf{0}$ und die Umkehrung $\mathbf{0} \rightarrow [\mathbf{ij} + \mathbf{ji}]$.

Literaturverzeichnis.

- [1] S. Cowin: Continuum Mechanics of Anisotropic Materials. Springer Science+Business, New York (2013)
- [2] H. Parisch: Festkörper-Kontinuumsmechanik. TeubnerV.
- [3] G. Falk, W. Ruppel: Mechanik. Relativität. Gravitation. Springer-Verlag, Berlin. (1989).
- [4] F. Herrmann: Skripten Experimentalphysik. KIT (1997).
- [5,6] O. Bschorr: DAGA-Fortschritte der Akustik.
- [5] DAGA 2014. S. 80/81. [6] DAGA 2013. S. 1262/3