Einfluss der Quellinterpolation auf hybride strömungsakustische Berechnungen in Finiten Volumen

Thorben Schröder, Patrick Silkeit, Otto von Estorff
TU Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, E-Mail:mub@tuhh.de

Einleitung

Hybride Ansätze in der numerischen Strömungsakustik basieren darauf, die Strömung und die daraus resultierende Akustik als getrennte, meist nacheinander durchführbare, Simulationen zu behandeln. Da beide Probleme verschiedene Anforderungen an die Diskretisierung aufweisen, werden häufig unterschiedliche Netze verwendet. Dabei ist das Strömungs-(CFD-)Netz meist feiner aufgelöst, beschränkt sich jedoch auf kleinere Rechengebiete. Um die Akustiksimulation durchführen zu können, müssen die Strömungsgrößen, bzw. daraus abgeleitete Quellterme, auf dem Akustiknetz bekannt sein. Es wird daher ein Verfahren zur Interpolation vom CFD-Netz auf das Akustiknetz benötigt. Die Komplexität der denkbaren Verfahren variiert sehr stark, was sich insbesondere auf den benötigten Aufwand zur Berechnung der Interpolationsgewichte auswirkt. Es stellt sich die Frage, wie hoch der minimal benötigte Aufwand bei gewünschter Ergebnisqualität ist. Besonders entscheidend ist diese Fragestellung, wenn beispielsweise viele Berechnungen mit unterschiedlichen Akustik- oder CFD-Netzen durchgeführt werden sollen und die Berechnung der Interpolationsgewichte daher mehrfach durchgeführt werden muss. Dieser Fall kann beispielsweise bei Netz-Konvergenzanalysen auftreten. Weiterhin ist ein schnelles Interpolationsverfahren hilfreich, wenn die übrigen Schritte der Akustiksimulation geringe Komplexität aufweisen und damit im Verhältnis zur Interpolation keinen dominanten Zeitaufwand bedeuten.

Der gegenwärtige Beitrag untersucht zwei unterschiedliche Interpolationsansätze, welche sich im Grad der Konservativität und im numerischen Aufwand unterscheiden. Dabei werden anhand eines Beispielfalles sowohl die Genauigkeit der Ergebnisse als auch Einflüsse auf die numerische Stabilität der Akustikberechnung betrachtet. Insbesondere die Anregung von Gitterschwingungen wird analysiert. Der hier verwendete Strömungsakustiklöser basiert auf der hybriden Simulation und diskretisiert das Akustikproblem in finiten Volumen (FV). Bei der Quellinterpolation ergeben sich aus der Nutzung von FV besondere Anforderungen, welche im vorliegenden Beitrag diskutiert werden.

Akustiklöser und Störungsgleichungen

Die Lösung sowohl des Strömungsproblems als auch der Akustik erfolgen in OpenFOAM. Für die Strömung wird der Standardlöser pimpleFoam verwendet, während die Akustik in einem eigenständigen Löser behandelt wird. Dieser ist in die OpenFOAM-Umgebung eingebettet und verwendet daher die Formulierung in FV.

Entscheidend für die Bewertung von Quellinterpolationsverfahren ist der Bezug zur mathematischen Formulierung des hybriden Verfahrens. Hier kommt der Ansatz „Expansion about Incompressible Flow“ (EIF) zum Einsatz, welcher auf einer zeitlichen Ableitung des inkompressiblen Strömungsdruckes als Quellterm basiert. Wie beispielsweise [4] zeigt, verhalten sich derartige Quellterme recht gutmütig bezüglich der benötigten Quellauflösung. Die EIF-Methode nutzt den Störungsansatz

$$p = p^i + p^a \qquad U = U^i + U^a \qquad \rho = \rho_0 + \rho^a, \tag{1}$$

wobei der obere Index $\langle\cdot\rangle^i$ die inkompressiblen Strömungsgrößen definiert und $\langle\cdot\rangle^a$ eine kompressible, akustische Störung darstellt. Da die Dichte bei inkompressibler Strömungsrechnung skalar und zeitlich konstant ist, wird sie abweichend mit ρ_0 benannt.

Wird der in Gleichung (1) definierte Störungsansatz in die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt und isentrope, viskositätsfreie Akustik angenommen, ergibt sich ein Satz von Störungsgleichungen, welcher als EIF bezeichnet wird. Das Gleichungssystem nach [2] ist eine Modifikation der ursprünglichen Formulierung von [3] und lässt sich schreiben als

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \nabla \cdot f = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial p^a}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho^a}{\partial t} = -\frac{\partial p^i}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(U^a + U^i\right) \otimes f + \rho_0 U^i \otimes U^a \right] + \nabla p^a = 0, \tag{4}$$

wobei $f = \rho_0 U^a + \rho^a U^i$ zur verkürzten Schreibweise eingeführt wurde, c die Schallgeschwindigkeit darstellt und $\otimes$ ein dyadisches Produkt anzeigt. Der dominante Quellterm ist $-\frac{\partial p^i}{\partial t}$. Die in diesem Beitrag vorgestellten Ergebnisse sind nur für die Anwendung mit dem EIF-Ansatz und mit Einschränkungen für andere Verfahren auf Basis des gleichen Quellterms gültig. Im Rahmen der Untersuchungen durchgeführte Tests für abweichende Quellterme (z.B. Lighthill) ergaben sehr viel stärkere Sensibilität bezüglich des Interpolationsverfahrens.

Quellinterpolation

In diesem Beitrag wird das Thema der Quellinterpolation für den Fall betrachtet, dass sowohl die CFD als auch die Akustiksimulation in FV gerechnet werden. Die Formulierung in FV basiert auf einer Integration der partiellen Differenzialgleichung über das Zellvolumen und resultiert entsprechend in nur einem Freiheitsgrad pro physikalischer Größe und Zelle. FV-Diskretisierungen eignen

sich besonders für die Lösung von Erhaltungsgleichungen. Das EIF-Verfahren ist in Erhaltungsform gegeben und profitiert diesbezüglich von einer Formulierung in FV.

Die Nutzung der FV für CFD und Akustik bedeutet spezielle Anforderungen an die Quellterminterpolation. Sie sollte im besten Falle einer Integration über Akustikzellen entsprechen. Der Quellterm des EIF-Verfahrens in FV ist mit

$$\int_V -\frac{\partial p^i}{\partial t} dv \tag{5}$$

definiert, wobei V das Volumen einer Akustikzelle ist.

Eine der entscheidenden Eigenschaften eines Interpolationsschemas für akustische Quellen ist Konservativität. Als konservativ wird ein Interpolationsverfahren bezeichnet, wenn das Integral über den akustischen Quellterm exakt erhalten bleibt.

Betrachtete Verfahren

Es werden zwei unterschiedliche Interpolationsverfahren betrachtet. Zum einen wird mit dem Interpolationsschema „Cell Volume Weight“(CVW) eine standardmäßig in FV eingesetzte Methode genutzt, welche in OpenFOAM bereits implementiert ist und lediglich in der Nutzungsform leicht abgewandelt werden musste. Dieses Verfahren basiert auf einer Berechnung aller Schnittvolumina zwischen Akustik- und CFD-Zellen (siehe Abbildung 1). Entsprechend der anteiligen Schnittvolumina am Gesamtvolumen einer Akustikzelle werden die Zellwerte der CFD-Lösung gewichtet. Das CVW-Verfahren ist konservativ und hoch genau. Für eine Interpolation zwischen zwei FV-Netzen ist es exakt, da es Feldgrößen entsprechend der Definition der FV abbildet und somit sogar bezüglich jeder einzelnen Akustikzelle konservativ ist.

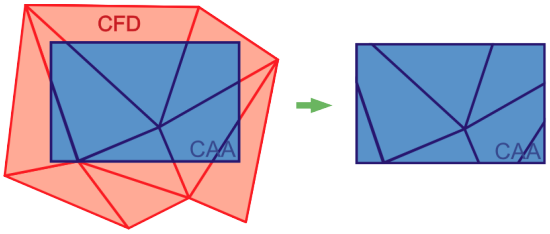

Abbildung 1: Schematische Darstellung der Interpolation mittels CVW-Methods.

Die Berechnung der Interpolationsgewichte mit der CVW-Methode ist, insbesondere bei großen Netzen, recht aufwändig. Daher wird hier alternativ auch die Interpolation auf Basis einer Gauß-Quadratur über jede Akustikzelle betrachtet. Dieser Ansatz ist bisher wenig beachtet, bietet jedoch einen deutlich reduzierten Aufwand gegenüber dem CVW-Verfahren. Weiterhin kann diese Methode als eine Form von Integration über die Akustikzellen verstanden werden und bezieht damit die Definition der FV mit ein. Abbildung 2 zeigt schematisch das Vorgehen für die Gauß-Interpolation. Dazu werden in jeder Akustikzelle zunächst die Gauß-Quadraturpunkte bestimmt. Da an deren exakter Position meist kein CFD-Zellmittelpunkt liegt, muss weiterhin definiert werden, wie ein geeigneter Wert aus den gegebenen CFD-Daten bestimmt werden kann. Hierfür sind zahlreiche Möglichkeiten denkbar. Gute Ergebnisse wurden mit einer Interpolation auf den Gauß-Punkt über inverse Distanzgewichte erzielt. Das einfache und schnelle Verfahren beruht auf einer Suche des nächstgelegenen Zellmittelpunktes im CFD-Netz mit anschließender Gewichtung der Zellwerte in dieser Zelle und allen Nachbarzellen über relative inverse Distanzgewichte nach

$$\varphi(x_g) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{|x_i - x_g|}} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|x_i - x_g|} \varphi(x_i). \tag{6}$$

Dabei ist φ eine beliebige Feldgröße, x_g der Ortsvektor des Gauß-Punktes, x_i sind die Ortsvektoren zu den beteiligten CFD-Zellmittelpunkten und m ist die Zahl der beteiligten CFD-Zellen. Die Interpolation mittels Gauß-Quadratur ist kein strikt konservatives Verfahren, da nur ein (in der Regel kleiner) Teil der CFD-Zellen überhaupt an der Interpolation beteiligt ist. Es hängt vom betrachteten Fall und vom verwendeten Verfahren ab, ob die fehlende Konservativität ein signifikantes Problem darstellt. Insbesondere spielt der betrachtete Quellterm eine entscheidende Rolle. Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit ergaben, dass gute Ergebnisse mit der Interpolation mittels Gauß-Quadratur bisher nur für den Quellterm $-\frac{\partial p^i}{\partial t}$ des EIF-Verfahrens erzielt werden konnten. Mit dem auf gleichem Quellterm basierenden Verfahren der zweiten Variante der Acoustic Perturbation Equations (APE-2, siehe [5]) wurden stichprobenartig gleiche Ergebnisse erreicht.

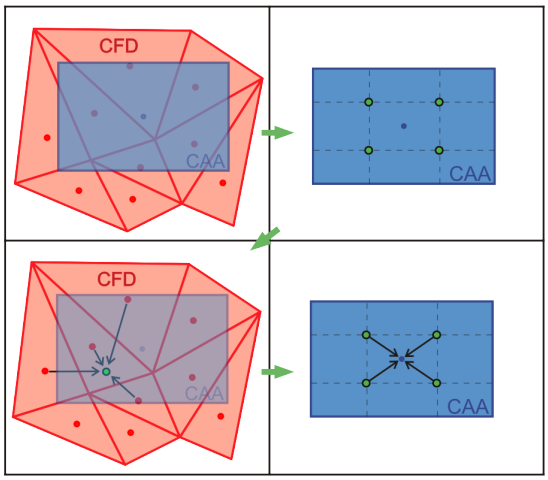

Abbildung 2: Schematische Darstellung der Interpolation mittels Gauß-Quadratur über Akustikzellen.

Neben den hier vorgestellten, sind auch weitere Interpolationsverfahren denkbar (siehe z.B. [4, 1] für Umsetzungen in der FEM). In diesem Beitrag wird sich auf die obigen

Methoden beschränkt, welche für die Verwendung mit FV besonders geeignet sind und auch in Gebieten mit groben CFD-Netzen keine Probleme zeigen.

Ergebnisse

Für den Test der vorgestellten Interpolationsverfahren wird die Simulation der Schallabstrahlung eines umströmten Zylinders genutzt. Bei der Queranströmung eines Zylinders entsteht eine sogenannte von Kármán'sche Wirbelstraße, die durch eine dipolartige Schallemission hervorgerufen wird. Es wird eine laminare Zylinderumströmung bei $Re = 200$ und $M = 0.0044$ betrachtet. Strömung und Akustik werden unter der Annahme unendlicher Ausdehnung und Korrelationslänge in Spannweitenrichtung zweidimensional simuliert. Abbildung 3 (links) zeigt das erzeugte Schallfeld qualitativ.

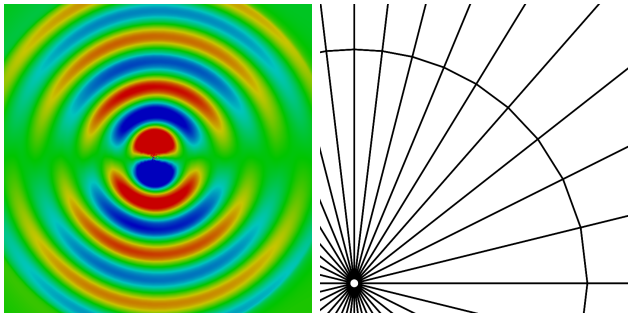

Abbildung 3: Links: Qualitatives Feld der Störungsgröße p^a bei Zylinderanströmung von links. Rechts: FV-Netz für die Akustik.

Physikalische Ergebnisse

Zunächst muss analysiert werden, wie sich die verschiedenen Interpolationsverfahren auf die Genauigkeit der berechneten physikalischen Felder auswirkt. Dabei kann festgehalten werden, dass auch bei sehr grobem Akustiknetz (siehe Abbildung 3, rechts) im Quellgebiet, keine signifikanten Unterschiede zwischen den unterschiedlichen Verfahren auftreten. Amplitude und Phase der dipolartigen Ergebnisse bei der Strouhal-Frequenz sind mit beiden Methoden und sämtlichen getesteten Gauß-Ordnungen (1, 2, 3, 5) im kompletten Rechengebiet nahezu identisch, wie beispielsweise die später gezeigten Abbildungen 4 und 5 zeigen. Weitere Untersuchungen haben dies bestätigt.

Gitterschwingungen

Neben der Abbildung der Schallwellen können bei Akustiksimulationen unphysikalische Gitterschwingungen (engl.: spurious waves) mit einer Wellenlänge von zwei Gitterabständen im Berechnungsergebnis auftreten (siehe z.B. [6]). Da zur Berechnung der Akustik wenig dissipative Schemata genutzt werden, ist die Entstehung der Gitterschwingungen meist nicht vollständig zu verhindern und es müssen selektive Dämpfung oder Filterung während der Zeitintegration genutzt werden, um den Effekt zu bekämpfen.

Bei dem Vergleich der hier diskutierten Interpolationsverfahren stellt sich heraus, dass die Anregung der Gitterschwingungen sehr stark von diesen abhängig ist. Abbildung 4 zeigt den Schalldruck im Beispielfall entlang einer Gerade, welche senkrecht zur Anströmung in primärer Ausbreitungsrichtung des Schalls vom Zylinder weg gerichtet ist. Die Auswertungsgerade befindet sich vollständig außerhalb des Interpolationsgebietes. Es ist zu erkennen, dass Gitterschwingungen bei einer Interpolation mittels Gauß-Quadratur sehr viel stärker auftreten, jedoch bei höherer Gauß-Ordnung schwächer sind. Um das relative Ausmaß der Gitterschwingungen bes-

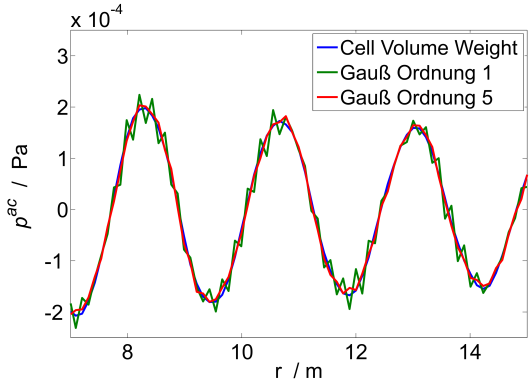

Abbildung 4: Schalldruck im Beispielfall entlang einer Gerade, welche senkrecht zur Anströmung in primärer Ausbreitungsrichtung des Schalls vom Zylinder weg gerichtet ist für verschiedene Interpolationsschemata.

ser beurteilen zu können, wird mittels FFT ein einseitiges Amplitudenspektrum des Schalldruckes entlang der Auswertungsgerade ($0,6\lambda < r < 10\lambda$) im Wellenzahlbereich berechnet. Abbildung 5 (oben) zeigt die Ergebnisse für die verschiedenen Interpolationsverfahren. Die Gitterschwingungen bei sehr hohen Wellenzahlen sind klar sichtbar. Die Anregung der Gitterschwingungen durch das Interpolationsverfahren hängt vermutlich mit einer unphysikalischen örtlichen Verteilung des interpolierten Quellfeldes, insbesondere bezüglich kleiner Längenskalen, zusammen. Eine mögliche Abhilfe könnte daher eine örtliche Tiefpassfilterung des Quellfeldes nach der Interpolation leisten. Um diesen Ansatz zu testen, wurden weitere Simulationen mit allen Interpolationsverfahren durchgeführt und das Quellfeld nach der Interpolation jeweils einmal mit einem Filter niedriger Ordnung gefiltert (OpenFOAM „simpleFilter“ mit kubischer Interpolation). Abbildung 5 (unten) zeigt, dass die Anregung der Gitterschwingungen dadurch selbst für niedrige Gauß-Ordnung fast vollständig vermieden werden kann.

Berechnungszeit

Tabelle 1 fasst beispielhaft benötigte Zeiten zur Berechnung der Interpolationsgewichte zusammen. Referenzwert ist jeweils die für das Verfahren CVW benötigte Zeit. Die Zeiten wurden mit insgesamt 14 in Zellenzahl und Struktur unterschiedlichen Netzkombinationen gemessen, wobei davon acht zweidimensional und sechs dreidimensional waren. Ermittelt wurden die Zeiten ohne Parallelisierung. Klar erkennbar ist die um

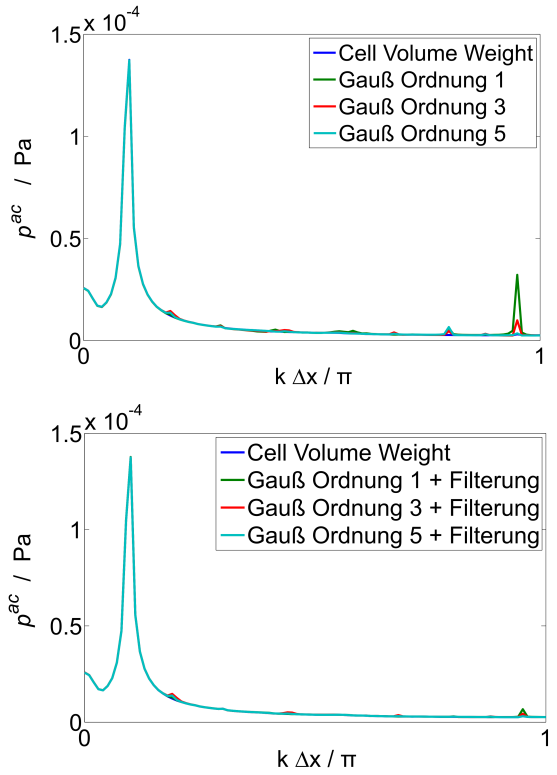

Abbildung 5: Einseitiges Amplitudenspektrum des Schalldruckes entlang der Auswertungsgerade ($0,6\lambda < r < 10\lambda$) im Wellenzahlbereich. Oben: Ohne Quellfeldfilterung. Unten: Mit Quellfeldfilterung für die Gauß-Interpolation.

Tabelle 1: Berechnungszeit für die Interpolationsgewichte relativ zur Berechnungszeit mit der CVW-Methode.

Variante	rel. Berechnungszeit
CVW	100%
Gauß Ordnung 1	0,2% bis 6,4%
Gauß Ordnung 3	0,7% bis 6,8%
Gauß Ordnung 5	3,0% bis 8,6%

minimal eine Größenordnung schnellere Berechnung mit dem Gauß-Verfahren.

Zusammenfassung

Mit den hier präsentierten Untersuchungen wurde der Einfluss unterschiedlicher Interpolationsverfahren für die Abbildung eines Strömungsakustischen Quellterms in FV gezeigt. Es kamen die CVW-Methode sowie ein schneller berechenbares Verfahren mittels Gauß-Quadratur über Akustikzellen zum Einsatz.

Bei dem hier verwendeten EIF-Ansatz ist der Einfluss auf die physikalischen Ergebnisse im Beispielfall vernachlässigbar. Der verwendete Quellterm ist sehr robust gegenüber kleineren Fehlern in der Konservativität des Interpolationsverfahrens.

Es konnte ein erheblicher Einfluss des verwendeten Interpolationsschemas auf die Anregung von unphysikalischen Gitterschwingungen beobachtet werden. Insbesondere die Interpolation mittels Gauß-Quadratur niedriger Ordnung ist stark betroffen. Die Anregung der Gitterschwingungen konnte durch einmalige örtliche Filterung des Quellfeldes nach der Interpolation auf das Akustiknetz auf das Niveau des CVW-Verfahrens reduziert werden.

In der für diesen Beitrag genutzten Umsetzung und diversen Beispielnetzen ist die Berechnung der Interpolationsgewichte mittels Gauß-Quadratur minimal um den Faktor 10 schneller als bei der CVW-Methode. Da bei Verwendung der Quellfeldfilterung keine Nachteile durch das gröbere Schema entstehen, bietet es ein Potential zur Effizienzsteigerung, welches im Vergleich zum Gesamtaufwand der Simulation im Individualfall zu bewerten ist. Als für die Autoren außerordentlich hilfreich hat sich die Verfügbarkeit der schnelleren Verfahren bei ersten (kurzen) Testsimulationen für den Aufbau neuer numerischer Modelle erwiesen.

Literatur

[1] de Wiart, C., Georges, L., Geuzaine, P., Detandt Y. und Caro, S.: Analysis of the noise source interpolation within a hybrid CAA method: application to the case of the Helmholtz resonator. 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference) (2009): 1-10.

[2] Shen, W. Z. und Sørensen, J. N.: Comment on the Aeroacoustic Formulation of Hardin and Pope. AIAA Journal Readers' Forum 37 (1999): 141–145.

[3] Hardin, J. C. und Pope, D. S.: An Acoustic / Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics. Theoretical and Computational Fluid Dynamics 6 (1994): 323–340.

[4] Hüppe, A. und Kaltenbacher, M.: Investigation of Interpolation Strategies for Hybrid Schemes in Computational Aeroacoustics. Proceedings of DAGA 2015. 872–875.

[5] Ewert, R. und Schröder, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. In: Journal of Computational Physics 188 (2003): 365–398.

[6] Tam, C. K. W., Webb, J. C. und Dong, Z.: A Study of the Short Wave Components in Computational Acoustics. Journal of Computational Acoustics. (1993):1-30.