

Energiebasierte FE-/BE-Methoden zur Simulation akustischer Fragestellungen im hohen Frequenzbereich

Kerstin Vater¹, Sören Keuchel¹, Olgierd Zaleski¹, Otto von Estorff¹

¹ Novicos GmbH, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mail@novicos.de

Einleitung

Technische Produkte müssen heute nicht nur hohe Umweltauflagen einhalten, sondern auch gestiegenen Komfortansprüchen gerecht werden. Um vibro-akustische Produkteigenschaften vor diesem Hintergrund auf effiziente Weise vorhersagen und kontrollieren zu können, kommen im Entwurfsprozess zunehmend numerische Simulationsverfahren zum Einsatz. Im Bereich der Akustik haben sich dabei vor allem die Finite- (FEM) und die Boundary-Elemente-Methode (BEM) etabliert. Diese eignen sich insbesondere für die Simulation niederfrequenter Schallfelder. Für Fragestellungen im hohen und sehr hohen Frequenzbereich dagegen zeigen energiebasierte Methoden großes Potential. Im Vergleich zu den klassischen Verfahren bieten diese zum einen den Vorteil, dass die Diskretisierung keine Frequenzabhängigkeit aufweist, und so mit steigender Berechnungsfrequenz nicht immer feinere FE-/BE-Netze verwendet werden müssen. Zum anderen führt die für diese Methoden charakteristische zeitliche und räumliche Mittelwertbildung der akustischen Größen dazu, dass die Ergebnisse vergleichsweise unempfindlich gegenüber kleinen Schwankungen in den Umgebungs- und Randbedingungen sind. Zudem kann so eine relativ einfache Aussage bezüglich der Verteilung der im Schallfeld enthaltenen Energie getroffen werden. Unter den Energie-Methoden lassen sich im Wesentlichen drei Ansätze herausstellen. Bei der Statistischen Energie-Analyse (SEA) [1] wird das System als Ganzes in kleinere, gekoppelte Subsysteme unterteilt, auf deren Basis das Modell anschließend untersucht wird. Innerhalb dieser gekoppelten Subsysteme wird die Energiedichte dabei als konstant angenommen, sodass keine Aussage über die räumliche Verteilung der vibro-akustischen Größen möglich ist. Im Gegensatz dazu stehen numerische Methoden, die eine energiebasierte Differentialgleichung lösen. Hier ist zum einen die Energie-Finite-Elemente-Methode (EFEM) [3] zu nennen, welche sich vornehmlich für die Simulation von Struktur-Vibrationen eignet. Dabei wird die räumliche Verteilung der Vibrations-Energiedichte und des Energieflusses innerhalb der Struktur ermittelt. Das Ergebnis einer solchen Berechnung kann daraufhin als Randbedingung für eine Energie-Boundary-Elemente-Methode (EBEM) genutzt werden, anhand derer sich im Anschluss das abgestrahlte hochfrequente Schallfeld ermitteln lässt. Dazu werden die akustische Energiedichte und Intensität im Fernfeld ausgewertet.

Im nächsten Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen der Energie-BEM näher erläutert, welche den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden soll. Es folgen einige ausgewählte numerische Beispiele, sowohl akademi-

scher Natur als auch Anwendungsbeispiele aus der Praxis. Abschließend wird eine Zusammenfassung des vorliegenden Beitrags gegeben, gefolgt von einem Ausblick für mögliche Weiterentwicklungen der vorgestellten EBEM-Formulierung.

Energie-Boundary-Elemente-Methode

Ausgangspunkt für die Herleitung der EBEM-Formulierung bildet eine hochfrequent schwingende Struktur, welche von einem unendlich ausgedehnten akustischen Medium umgeben ist. Dabei wird die Annahme getroffen, dass sich die Quellen auf den einzelnen Randelementen inkohärent verhalten [5], also keinerlei Phasenbeziehung zueinander aufweisen. Zudem sollen im Folgenden Dämpfungseffekte des akustischen Mediums auf die Struktur vernachlässigt werden.

Die akustische Energiedichte e und Intensität \mathbf{I} in einem beliebigen Feldpunkt \mathbf{Y} im Außenraum der Geometrie werden zunächst zeitlich über eine Periode T gemittelt. Das Ergebnis dieser ersten Mittelwertbildung bilden die akustischen Größen

$$\langle e_Y \rangle = \frac{1}{4} \left[\rho \hat{\mathbf{v}}_Y \cdot \hat{\mathbf{v}}_Y^* + \frac{1}{\rho c^2} \hat{p}_Y \hat{p}_Y^* \right] \quad (1)$$

und

$$\langle \mathbf{I}_Y \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\hat{p}_Y \hat{\mathbf{v}}_Y^*) \quad , \quad (2)$$

wobei p den Schalldruck und \mathbf{v} die Schallschnelle im betrachteten Feldpunkt \mathbf{Y} repräsentieren. Dabei handelt es sich um komplexe Größen $\hat{\cdot}$ mit dem zugehörigen komplex konjugierten Wert $\hat{\cdot}^*$.

Im nächsten Schritt wird der sogenannte Ensemble-Mittelwert E der akustischen Größen (1) und (2) gebildet, welcher für hohe Frequenzen der Frequenzmitteilung über ein Terzband entspricht. Das Ergebnis dieser zweiten Mittelung bilden schließlich die Feldgrößen der EBEM, die akustische Energiedichte

$$\tilde{e}_Y = \frac{1}{4} \left[\rho E [\hat{\mathbf{v}}_Y \cdot \hat{\mathbf{v}}_Y^*] + \frac{1}{\rho c^2} E [\hat{p}_Y \hat{p}_Y^*] \right] \quad (3)$$

und Intensität

$$\tilde{\mathbf{I}}_Y = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E [\hat{p}_Y \hat{\mathbf{v}}_Y^*]) \quad , \quad (4)$$

zeitlich gemittelt über eine Periode T sowie frequenzgemittelt über ein Terzband mit der Mittenfrequenz f_m . Werden die auf diese Weise gewonnenen Definitionen der Feldgrößen (3) und (4) nun in ein Integral aus der konventionellen BEM

$$\hat{p}_Y = \int_S A(\mathbf{P}) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} dS \quad (5)$$

eingesetzt, so ergeben sich unter Ausnutzung der Beziehung zwischen Schalldruck p und Schallschnelle \mathbf{v}

$$\hat{\mathbf{v}}_Y = -\frac{1}{i\rho\omega} \nabla \hat{p}_Y \quad (6)$$

zwei energiebasierte Randintegralgleichungen für die Energiedichte

$$\tilde{\epsilon}_Y = \int_S \sigma(\mathbf{P}) \underbrace{\left(\frac{\rho}{64\pi^2 r^4} + \frac{k^2 \rho}{32\pi^2 r^2} \right)}_{G(\mathbf{P}, \mathbf{Y})} dS \quad (7)$$

und die Intensität

$$\tilde{\mathbf{I}}_Y = \int_S \sigma(\mathbf{P}) \underbrace{\frac{k^2 \rho c}{32\pi^2 r^2} \mathbf{E}_r}_{\mathbf{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Y})} dS \quad (8)$$

Diese bilden die Grundlage für die EBEM. Darin bezeichnet \mathbf{P} einen beliebigen Punkt mit der Quell-Intensitätsdichte σ auf der Modelloberfläche S , und r den Abstand zwischen diesem Punkt und einem Feldpunkt \mathbf{Y} . In Abbildung 1 ist dieser Zusammenhang für den diskreten Fall eines Quell-Punkts ξ in der Mitte eines Randelements schematisch dargestellt. Weiterhin repräsentiert \mathbf{E}_r den normierten Abstandsvektor zwischen Quell- und Feldpunkt.

Die eigentliche diskrete Randintegralgleichung, welche mithilfe der EBEM gelöst wird, ergibt sich schließlich über die Definition der abgestrahlten akustischen Leistung eines einzelnen Randelements i :

$$\bar{P}_i = \int_{S_i} \tilde{\mathbf{I}}_i \cdot \mathbf{n}_i dS_i \quad (9)$$

Das zu lösende Gleichungssystem beschreibt nun die abgestrahlte akustische Leistung der einzelnen Randelemente in Abhängigkeit eines doppelten Oberflächenintegrals, multipliziert mit den Quell-Intensitätsdichten der Randelemente:

$$\bar{P}_i = \sum_{j=1, j \neq i} \{ \sigma_j \int_{S_i} \left[\int_{S_j} \mathbf{H}(\xi, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}_i dS_j \right] dS_i \} + \sigma_i A_i \frac{k^2 \rho c}{16\pi}, \quad i = 1 \dots n \quad (10)$$

Die einzelnen Koeffizienten der Einflussmatrix werden mithilfe numerischer Integrationsverfahren wie der Gauss-Quadratur berechnet. Für den Fall, dass das Quell-Element j dem Empfänger-Element i entspricht, wird der Integrand singulär. Der betreffende Term kann jedoch analytisch bestimmt werden, sodass ein zusätzlicher Summand in der diskreten Randintegralgleichung 10 auftritt, und der singuläre Fall aus der Summe ausgeschlossen wird. Das resultierende lineare Gleichungssystem kann beispielsweise mit iterativen Lösungsverfahren behandelt werden.

Eine Besonderheit der vorgestellten EBEM-Formulierung stellt die effiziente Berücksichtigung reflektierender Halbebenen dar. Bei vielen Fragestellungen in der Akustik handelt es sich um sogenannte Halbraum-Probleme, bei

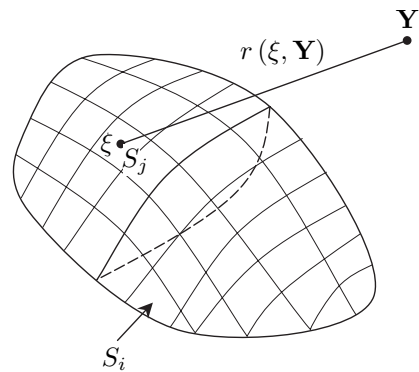


Abbildung 1: Diskretisierung der Modelloberfläche mit n Randelementen

denen ein unendlich ausgedehntes akustisches Medium durch eine Halbebene begrenzt wird, beispielsweise bei einem Fahrzeug auf der Straße. Die klassische Formulierung der EBEM verlangt hier die Diskretisierung aller an das Medium angrenzenden Flächen, also der Modelloberfläche selbst sowie der gesamten, unendlich ausgedehnten Halbebene. Um eine effiziente numerische Simulation solcher Fragestellungen zu ermöglichen, wird in diesem Kontext auf eine modifizierte Kern-Funktion [4] zurückgegriffen:

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Y}) = \frac{k^2 \rho c}{32\pi^2 r^2(\mathbf{P}, \mathbf{Y})} \mathbf{E}_r + R_H \frac{k^2 \rho c}{32\pi^2 r_1^2(\mathbf{P}_1, \mathbf{Y})} \mathbf{E}_{r_1} \quad (11)$$

wobei R_H den Reflektionskoeffizienten der Halbebene repräsentiert. Diese Modifikation lässt sich als zusätzlicher Einfluss an der Halbebene gespiegelter Quellen interpretieren, wie in Abbildung 2 skizziert. In diesem Fall muss die Halbebene nicht diskretisiert werden, sodass der numerische Aufwand deutlich reduziert wird.

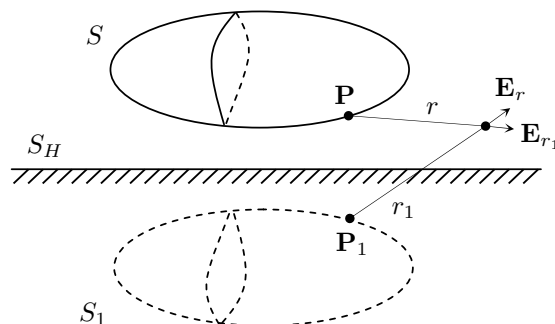


Abbildung 2: Interpretation einer Halbraum-Formulierung als Spiegelung der Modelloberfläche an der Halbebene

Ergebnisse

Anhand der nachfolgenden numerischen Beispiele soll die vorgestellte EBEM-Formulierung nun verifiziert werden. Dabei wird eine Anregung durch Monopol-Quellen im Inneren der Strukturen angenommen, für deren erzeugtes Schallfeld eine einfache analytische Lösung existiert:

$$\tilde{\epsilon}_Y = \sum_{i=1}^m [\bar{\sigma}_i G(\mathbf{P}_i, \mathbf{Y})], \quad \tilde{\mathbf{I}}_Y = \sum_{i=1}^m [\bar{\sigma}_i \mathbf{H}(\mathbf{P}_i, \mathbf{Y})] \quad (12)$$

Zu diesem Zweck wird die äquivalente abgestrahlte akustische Leistung der einzelnen Randelemente mithilfe der Gleichung

$$\bar{P}_i = \int_{S_i} \left\{ \sum_{i=1}^m [\bar{\sigma}_i \mathbf{H}(\mathbf{P}_i, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}_i] \right\} dS_i \quad (13)$$

ermittelt, und als Randbedingung entsprechend der rechten Seite des linearen Gleichungssystems gesetzt. Darin bezeichnet σ nun die Quellstärken der einzelnen Monopol-Quellen und \mathbf{P} deren Position. Die Überlagerung der analytischen Monopol-Schallfelder wird durch einfaches Aufsummieren über alle m Quellen erreicht.

Als erstes numerisches Beispiel wird eine schallabstrahlende Kugel-Geometrie mit Radius $R = 1.0$ im infiniten akustischen Medium Luft betrachtet. Die Kugelfläche ist mit $n = 384$ Elementen diskretisiert und wird in ihrem Zentrum von einer einzelnen Monopol-Quelle mit uniformer Quellstärke angeregt, zunächst bei $f = 200$ Hz. In Abbildung 3 ist der Schalldruckpegel in Abhängigkeit des Abstands r vom Zentrum des Modells aufgetragen. Die Diskretisierung der Geometrie entspricht den für die klassische BEM empfohlenen 6 – 10 Elementen pro Wellenlänge [2], sodass BEM-Ergebnisse und EBEM-Werte hier gut übereinstimmen.

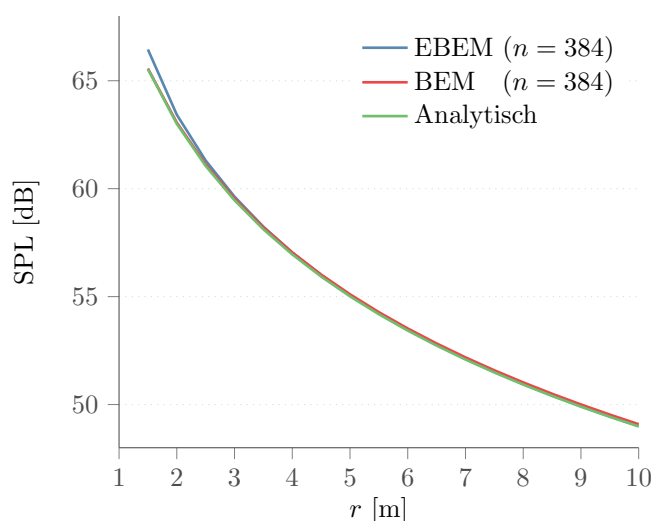


Abbildung 3: Schalldruckpegel (SPL) in Abhängigkeit des Abstands vom Zentrum einer schallabstrahlenden Kugel-Geometrie r bei einer Anregungsfrequenz von $f = 200$ Hz

Wird die Anregungsfrequenz nun deutlich auf einen Wert von $f = 3000$ Hz erhöht, versagt die konventionelle BEM bei gleichbleibender Diskretisierung, wie Abbildung 4 entnommen werden kann. Die EBEM-Ergebnisse stimmen dagegen weiterhin gut mit der analytischen Lösung überein. Werden auch hier 6 – 10 Elementen pro Wellenlänge für die klassische BEM verwendet, ergibt sich ein BE-Netz mit etwa $n = 38000$ Randelementen, was einer enormen Erhöhung des Rechenaufwands gleichkommt. Aus diesem Grund eignet sich die EBEM vor allem für Fragestellungen im hohen und sehr hohen Frequenzbereich besonders gut.

Als Anwendungsbeispiel aus der Praxis wird nun ein

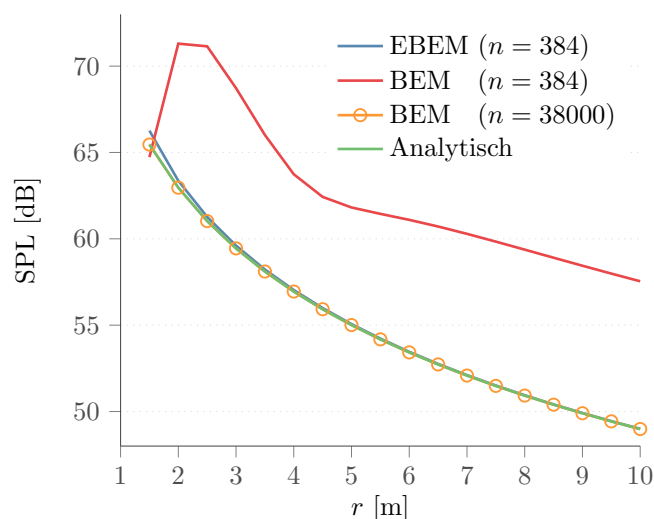


Abbildung 4: Schalldruckpegel (SPL) in Abhängigkeit des Abstands vom Zentrum einer schallabstrahlenden Kugel-Geometrie r bei einer Anregungsfrequenz von $f = 3000$ Hz

Passagier-Flugzeug untersucht, dessen Oberfläche mit etwa $n = 5000$ Randelementen diskretisiert ist. Die Anregung erfolgt durch vier Monopol-Quellen uniformer Stärke im Zentrum der Triebwerke bei $f = 1000$ Hz. Wie in Abbildung 5 zu sehen, gibt die EBEM das analytische Schallfeld der Monopol-Quellen korrekt wieder. Die EBEM eignet sich damit grundsätzlich auch für komplexe Fragestellungen aus der Luftfahrt, bei denen großskalige Strukturen hochfrequente Schallfelder erzeugen.

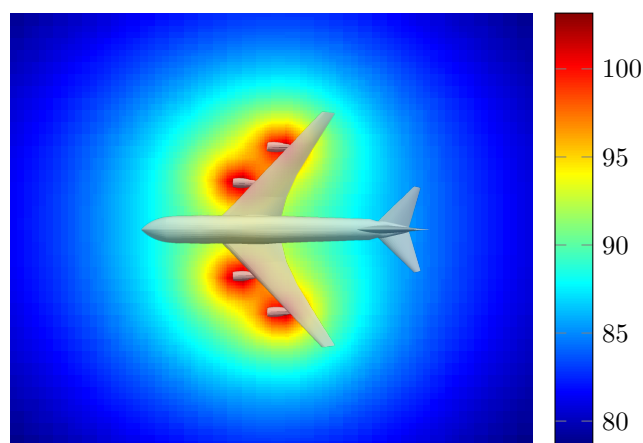


Abbildung 5: Schallfeld eines Passagier-Flugzeugs (Energiedichte-Level L_e [dB]) bei einer Anregungsfrequenz von $f = 1000$ Hz

Zur Verifizierung der vorgestellten Halbraum-Formulierung wird nun wieder auf die Kugel-Geometrie zurückgegriffen, welche dieses Mal in einem Abstand d von einer reflektierenden Halbebene platziert wird. In Abbildung 6 ist die Energiedichte auf der Halbebene in Abhängigkeit des projizierten Abstands vom Zentrum der Kugel r aufgetragen. Während die mithilfe der EBEM numerisch ermittelten Werte bei vergleichsweise großem Abstand zur Ebene gut mit der analytischen Lösung übereinstimmen, ist bei kleiner werdendem

Abstand ein deutlicher Trend zu größeren Abweichungen zu erkennen. Dieser liegt in dem Verfahren zur numerischen Integration der Einflusskoeffizienten begründet. Bei hohen auftretenden Gradienten, wie sie bei nah beieinander liegenden Quell- und Empfänger-Elementen nahe der Halbebene auftreten, ist eine höhere Integrationsordnung erforderlich, um eine gleichbleibende Ergebnisgüte gewährleisten zu können. Diesen Umstand gilt es bei der Anwendung der Halbraum-Formulierung zu berücksichtigen, beispielsweise mittels angepasster numerischer Routinen oder adaptiver Integrationsordnungen.

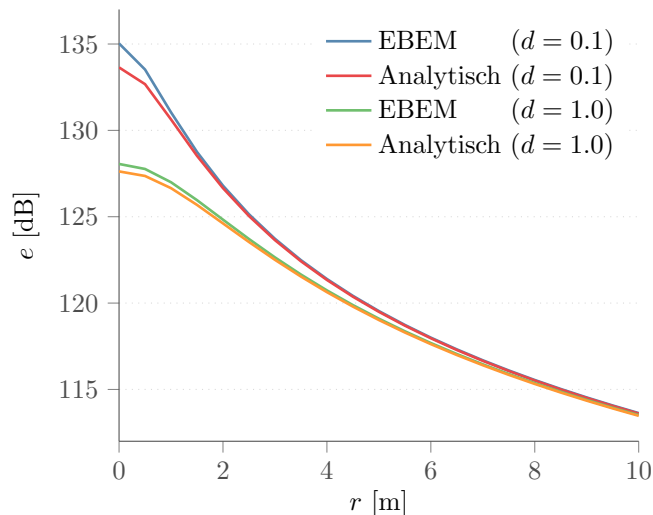


Abbildung 6: Energiedichte e in Abhängigkeit des auf die Halbebene projizierten Abstands vom Zentrum einer schallabstrahlenden Kugel-Geometrie r bei einer Anregungsfrequenz von $f = 3000$ Hz

Als praktisches Anwendungsbeispiel für die Halbraum-Formulierung der EBEM wird im Folgenden ein Fahrzeug betrachtet, dessen Karosserie-Oberfläche mit etwa $n = 1000$ Elementen diskretisiert ist. Die Darstellung der Abgasanlage und der Reifen dient in diesem Fall lediglich der Orientierung. Die Anregung erfolgt durch Monopol-Quellen im Inneren der Karosserie im Bereich des Motors, der Reifen und des Auspuffs bei $f = 10\,000$ Hz. Das akustische Feld wird auf der reflektierenden Fahrbahn-Oberfläche ausgewertet und in Abbildung 7 visualisiert. Auch hier wird das durch die Monopol-Quellen erzeugte Schallfeld korrekt wiedergegeben. Die EBEM eignet sich demzufolge ebenfalls für komplexe Halbraum-Probleme aus der Fahrzeug-Akustik, bei denen hochfrequente Schallfelder von Interesse sind.

Zusammenfassung

Im Rahmen dieses Beitrags wurde gezeigt, dass sich energiebasierte numerische Methoden besonders gut für hochfrequente akustische Fragestellungen eignen. Dabei wird die EFEM insbesondere für die Analyse von Struktur-Vibrationen eingesetzt. Die Ergebnisse einer solchen Berechnung können als Randbedingung für eine EBEM-Simulation verwendet werden, um das ab-

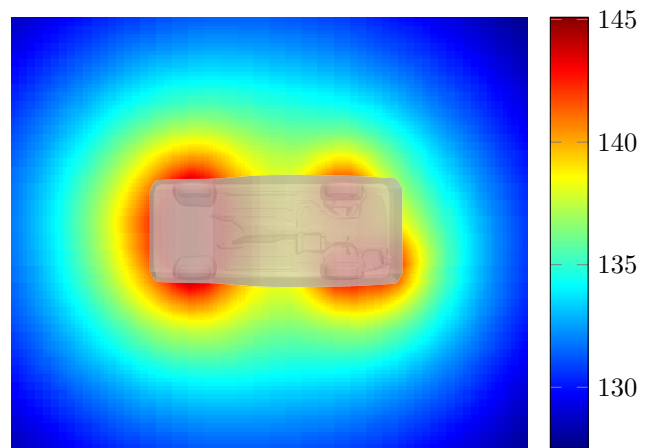


Abbildung 7: Schallfeld eines Fahrzeugs (Energiedichte-Level L_e [dB]) bei einer Anregungsfrequenz von $f = 10\,000$ Hz

gestrahlte Schallfeld auf effiziente Weise zu ermitteln. Selbst komplexe Fragestellungen aus der Luftfahrt und der Fahrzeug-Akustik können mit dieser Methode behandelt werden. In einem nächsten Schritt können nun verschiedene akustische Medien, beispielsweise Luft und Wasser, gekoppelt werden, um maritime Anwendungsbereiche zu erschließen. Auch eine bidirektionale Kopplung zwischen EFEM (Struktur) und EBEM (akustisches Medium) ist konzeptionell möglich, um wechselseitige Einflüsse berücksichtigen zu können.

Literatur

- [1] Lyon, R. H.: Theory and application of statistical energy analysis. Elsevier, 2014
- [2] Marburg, S.: Discretization requirements: How many elements per wavelength are necessary?. Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods (2008), 309-332
- [3] Moens, I.: On the use and the validity of the energy finite element method for high frequency vibrations. (2001)
- [4] Wang, A.: An energy boundary element formulation for predicting the acoustic field around a vehicle at high frequencies due to airborne noise sources. ASME 2003 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (2003), 151-161
- [5] Wang, A.: Development of an energy boundary element formulation for computing high-frequency sound radiation from incoherent intensity boundary conditions. Journal of Sound and Vibration 278 (2004), 413-436