

Kontinuumsmechanische Betrachtungen zur Intensität

Thomas Kletschkowski

HAW Hamburg, 20099 Hamburg, E-Mail: thomas.kletschkowski@haw-hamburg.de

Einleitung

Energie- und Leistungstransport durch Grenz- und Querschnittsflächen werden in der Technischen Akustik mit Hilfe der Intensität beschrieben, die eine vektorielle Größe darstellt und hinsichtlich ihrer physikalischen Dimension als flächenbezogene Leistung zu interpretieren ist. Während sie für Luftschallphänomene übereinstimmend als Produkt aus Schallwechseldruck und Schallschnelle eingeführt wird, existieren im Bereich des Körperschalls Definitionen, die wahlweise auf extensiven Größen oder aber auf einer durch den Spannungstensor vermittelten linearen Abbildung des Geschwindigkeitsvektors beruhen.

Im Bestreben diese zum Teil unterschiedlichen Sichtweisen zu vereinheitlichen, befasst sich die vorliegende Arbeit mit einer kontinuumsmechanischen Begründung des Intensitätsbegriffes. Dieser wird ausgehend vom Prinzip der virtuellen Leistung als die durch den Cauchy-Spannungstensor vermittelte Abbildung des Geschwindigkeitsvektors für finite Deformationen eingeführt. Nachfolgend werden Darstellungen, die auf dem ersten und zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor beruhen sowie die zwischen diesen Darstellungen geltenden Transformationsbeziehungen angegeben.

Ausgehend von diesen Darstellungen werden für infinitesimale Deformationen die Sonderfälle (a) Hydrostatischer Druck, (b) einachsiger Zug, (c) reine Biegung und (d) Torsion betrachtet, wobei für diese Grundbelastungsfälle Ausdrücke die zugehörigen Definitionen der Intensität abgeleitet werden. Insbesondere für den Fall der Biegung wird diskutiert, unter welchen Voraussetzungen die kontinuumsmechanisch begründete Strukturintensität durch das Produkt extensiver Größen (wie beispielsweise Biegemoment und zeitliche Änderung des Biegewinkels) äquivalent ersetzt werden kann.

Strukturintensität in der Literatur

Der Begriff der Strukturintensität wurde durch Noiseux im Zusammenhang mit Untersuchungen an Balken- und Plattenstrukturen als zeitliches Mittel des Leistungsflusses eingeführt, dessen Momentanwert durch Multiplikation der Schnittlasten (Querkraft und Biegemoment) mit den Zeitableitungen der zugehörigen Verschiebungsmaße (Vertikalverschiebung und Biegewinkel) definiert wurde, siehe [1].

Diese Arbeiten aufgreifend, definiert Zhang, siehe [2], den Momentanwert der Strukturintensität zwar als eine durch den linearisierten Tensor der Cauchy-Spannungen, siehe [5] und [6], vermittelte lineare Abbildung des Vektors der Strukturgeschwindigkeit in den Intensitätsvektor, gibt dessen Komponenten aber wiederum nur für Plattenstrukturen unter Verwendung der oben genannten Schnittlasten und Verschiebungsmaße an.

Lui und Andere folgen diesem Vorgehen, siehe [3], ergänzen es aber durch die Berücksichtigung der Normalkräfte und Zeitableitungen der Längsverschiebungen, was Petrone und Andere in [4], allerdings im Frequenzbereich, fortsetzen.

In allen oben genannten Arbeiten sind die Betrachtungen auf den Leistungstransport in Platten- und Balkenstrukturen für den Bereich kleiner Deformationen begrenzt. Eine, sich auch für finite Deformationen eignende Formulierung in die sich die strukturmechanischen Konzepte einbetten lassen, findet sich nicht und soll daher nachfolgend motiviert werden.

Kontinuumsmechanische Betrachtung

Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Leistung, siehe [5],

$$\int_{\partial B_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} da = \int_{B_t} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} dm + \int_{B_t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{L} dv, \quad (1)$$

das den Spannungsvektor \mathbf{t} auf dem Rand ∂B_t , die Beschleunigung \mathbf{a} im Gebiet B_t , die Cauchy-Spannungen \mathbf{T} , die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta \mathbf{v}$ sowie den virtuellen Geschwindigkeitsgradienten $\delta \mathbf{L}$ enthält, kann, die mechanische Leistungsbilanz gewonnen werden, wenn die virtuellen durch die realen Größen ersetzt werden

$$\int_{\partial B_t} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) da = \frac{1}{2} \int_{B_t} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dm + \int_{B_t} tr(\mathbf{T}^T \mathbf{L}) dv, \quad (2)$$

Diese besagt, dass die Summe aus zeitlicher Änderung der kinetischen Energie und Spannungsleistung gleich der über den Rand übertragenden flächenbezogenen Leistung ist, die, weil auf den Cauchy-Spannungen basierend, im Folgenden als wahre Intensität

$$\mathbf{I} := \mathbf{T}^T \mathbf{v} \quad (3)$$

bezeichnet und durch die Anwendung des Cauchy-Spannungstensors auf den Geschwindigkeitsvektor für die Momentanconfiguration gewonnen wird. Unter Verwendung der 1. und 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\mapsto \overset{1.PK}{\mathbf{T}} := J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{mit } J = \det \mathbf{F} \\ \mathbf{T} &\mapsto \overset{2.PK}{\mathbf{T}} := \mathbf{F}^{-1} \overset{1.PK}{\mathbf{T}} \end{aligned} \quad (4)$$

kann der der Momentanwert der Intensität ebenfalls für die Zwischenplatzierung und die Referenzconfiguration angegeben werden

$$\overset{1.PK}{\mathbf{I}} := J \mathbf{F}^{-1} \overset{2.PK}{\mathbf{I}} \quad \text{und} \quad \overset{2.PK}{\mathbf{I}} := \overset{2.PK}{\mathbf{T}} \mathbf{F}^{-T} \overset{2.PK}{\mathbf{T}} \overset{1.PK}{\mathbf{I}}. \quad (5)$$

Anwendung auf finite Deformationen

Die oben dargestellten Intensitätsmaße sollen nachfolgend am Beispiel der einfachen Scherung, siehe beispielsweise [5], miteinander verglichen werden. Diese volumen-erhaltende Deformation ist durch ein homogenes Verschiebungs- $\mathbf{u} = \gamma Y \mathbf{e}_x$ (mit Scherzahl γ und der materiellen Koordinate Y) und Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \dot{\gamma} Y \mathbf{e}_x$ (mit der Scherrate $\dot{\gamma}$) bestimmt. Der Deformationsgradient berechnet sich zu $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y$ und gestattet unter Verwendung des linken Cauchy-Green Tensors $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ sowie der Annahme elastischen Materialverhaltens, nach [6], die Berechnung des Cauchy-Spannungstensors

$$J \cdot \mathbf{T} = K \cdot \log(\det \mathbf{B}) \mathbf{1} + G \cdot \det \mathbf{B}^{-\frac{1}{3}} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{B}) \mathbf{1} \right), \quad (6)$$

(mit dem Kompressionsmodul K und dem Schubmodul G) dessen Koordinaten bez. der kartesischen Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ wie folgt zusammengefasst werden können

$$\mathbb{T} = G \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & -\frac{1}{3} \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \gamma^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Die Koordinaten der weiteren und in Gleichung (4) angegebenen Spannungsmaße sind:

$${}^{1.PK} \mathbb{T} = G \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma + \frac{1}{3} \gamma^3 & -\frac{1}{3} \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

und

$${}^{2.PK} \mathbb{T} = G \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma^4 & \gamma + \frac{1}{3} \gamma^3 & 0 \\ \gamma + \frac{1}{3} \gamma^3 & -\frac{1}{3} \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \gamma^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

wobei die Asymmetrie der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen deutlich zu Tage tritt. Die Gleichungen (7)–(9) verdeutlichen, dass die oben definierten Spannungsmaße nur für kleine Deformationen zusammenfallen. Die Koordinaten der zugehörigen Intensitätsmaße, vergleiche Gleichung (3) und Gleichung (5), werden ebenfalls bezüglich der oben angegebenen Basis angeschrieben:

$$\mathbb{I} = G \dot{\gamma} Y \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \gamma^2 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{1.PK} \mathbb{I} = G \dot{\gamma} Y \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \gamma^2 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad (10)$$

$${}^{2.PK} \mathbb{I} = G \dot{\gamma} Y \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma & \gamma + \frac{1}{3} \gamma^3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Auch die in Gleichung (10) angegebenen Intensitätsmaße fallen nur zusammen, wenn Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können, siehe ebenfalls Abbildung 1.

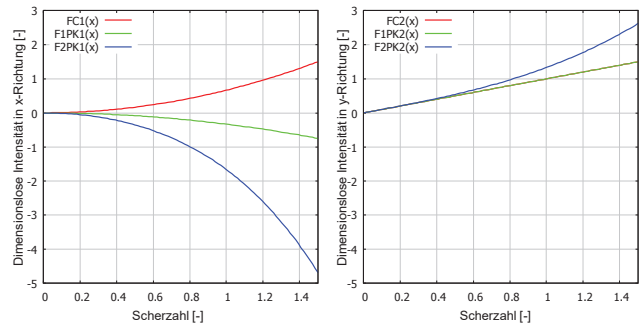


Abbildung 1: Verlauf der Intensitäten bei einfacher Scherung. Links: x -Koordinate, Rechts: y -Koordinate. Rot: wahre Intensität, Grün: 1. Piola-Kirchhoff Intensität, Blau: 2. Piola-Kirchhoff Intensität.

Anwendung in der Strukturmechanik

Im Bereich kleiner Deformationen werden nachfolgend die Sonderfälle (a) Hydrostatischer Druck, (b) einachsiger Zug, (c) reine Biegung und (d) Torsion betrachtet.

Hydrostatischer Druck ist durch einen isotropen Spannungszustand $\mathbf{T} = -p \mathbf{1}$ (mit dem Druck p) bestimmt, und führt bei Auswertung der linken Seite der mechanischen Leistungsbilanz, Gleichung (2), auf

$$P := - \int_{\partial B_t} \mathbf{n} \cdot (p \mathbf{v}) da = \int_{B_t} \nabla \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) dv. \quad (11)$$

Für derartige Spannungszustände entspricht der Momentanwert der Intensität dem aus der Akustik bekannten Produkt aus Druck und Partikelgeschwindigkeit. Das Integral über den Rand ergibt den zugehörigen Leistungsfluss.

Die weiteren Fälle werden für eine gerade und homogene Balkenstruktur mit konstantem und geschlossenem Kreisquerschnitt betrachtet, wobei die Normale mit der x -Achse zusammenfällt und die z -Achse in die nach unten weisende Vertikale zeigt. Beigemomente drehen positiv um die y -Achse.

Einachsiger Zug ist durch $\mathbf{T} = \sigma \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x$ mit $\sigma = N/A$ charakterisiert, wobei N die in Längsrichtung wirkende Normalkraft und A die Querschnittsfläche bezeichnen. Aufgrund der Querkontraktion ist der Geschwindigkeitsvektor in allen Komponenten besetzt, jedoch führt die Anwendung von \mathbf{T} auf \mathbf{v} zu $\mathbf{I} = \mathbf{T}^T \mathbf{v} = \sigma \dot{u} \mathbf{e}_x$ (mit der

Verschiebungsgeschwindigkeit \dot{u}). Die Auswertung der mechanischen Leistungsbilanz (2) ergibt

$$P := \int_{B_t} \nabla \cdot \mathbf{I} dv = \int_{\partial B_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} da = \sigma \dot{u} \int_{\partial B_t} da = N \dot{u}, \quad (12)$$

so dass für diesen Belastungsfall, wie in [3] und [4] vorgenommen, unter Verwendung der Querschnittsfläche A eine direkte Zuordnung der Intensität $\sigma \dot{u}$ zum Leistungsfluss $N \dot{u}$ erfolgen kann.

Reine Biegung ist ein Lastfall, dessen Spannungszustand $\mathbf{T} = \sigma \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \tau (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x)$, insbesondere für gedrungene Balkenstrukturen die Berücksichtigung von Normalspannungen

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} Z \quad (13)$$

(mit: I_y – axiales Flächenträgheitsmoment, M_y – Biegemoment, Z – Koordinate für Balkenhöhe) und Schubspannungen

$$\tau = \frac{Q_z}{I_y} \frac{S_y}{b} \stackrel{i.A.}{\neq} \frac{Q_z}{A} \quad (14)$$

(mit: b – Breite, S_y – Formfaktor, Q_z – Querkraft in z -Richtung) erfordert. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld wird in für die xz -Ebene betrachtet $\mathbf{v} = \dot{w}' Z \mathbf{e}_x + \dot{w} \mathbf{e}_z$ (ein Strich kennzeichnet die partielle Ableitung nach der Längskoordinate x). Nach Gleichung (3) folgt der Momentanwert der Intensität zu

$$\mathbf{I} = (\sigma \dot{w}' Z + \tau \dot{w}) \mathbf{e}_x + \tau \dot{w}' Z \mathbf{e}_z \quad (15)$$

und die Berechnung der zugehörigen Leistung nach Gleichung (2) ergibt

$$\begin{aligned} P &= \int_{B_t} \nabla \cdot \mathbf{I} dv = \int_{\partial B_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} da \\ &= \int_{\partial B_t} (\sigma \dot{w}' Z + \tau \dot{w}) da \\ &= \int_{\partial B_t} \frac{M_y}{I_y} \dot{w}' Z^2 da + \int_{\partial B_t} \frac{Q_z}{I_y} \frac{S_y}{b} \dot{w} da \\ &= M_y \dot{w}' + \dot{w} \int_{\partial B_t} \frac{Q_z}{I_y} \frac{S_y}{b} da \stackrel{i.A.}{\neq} M_y \dot{w}' + Q_z \dot{w}. \end{aligned} \quad (16)$$

Der in [1] definierten Momentanwert der Leistungsgröße $M_y \dot{w}' + Q_z \dot{w}$ kann nach Auffassung des Autors für diesen Belastungsfall streng genommen nicht, wie jedoch in [2] – [4] erfolgt, mit der Intensität nach Gleichung (15), identifiziert werden, da der Zusammenhang zwischen der intensiven Größe \mathbf{I} und der extensiven Größe P im Allgemeinen nicht durch einen festen Proportionalitätsfaktor (wie zuvor die Querschnittsfläche A) bestimmt ist.

Torsion ist für die zugrundegelegte (einfachste!) Balkenstruktur bezüglich der verwendeten kartesischen Orthogonalnormalbasis durch den nachfolgenden Spannungstensor $\mathbf{T} = -G \vartheta' [Z (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x) - Y (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x)]$ gegeben, wobei die Drillung $\vartheta' = M_T / GI_P$ durch die Schubsteifigkeit GI_P und das, um die x -Achse wirkende, Torsionsmoment M_T bestimmt ist. Das Geschwindigkeitsfeld kann wie folgt angeschrieben werden $\mathbf{v} = -Z \dot{\vartheta} \mathbf{e}_y - Y \dot{\vartheta} \mathbf{e}_z$. Die Intensität berechnet sich nach Gleichung (3) zu

$$\mathbf{I} = G \vartheta' \dot{\vartheta} (Y^2 + Z^2) \mathbf{e}_x = G \vartheta' \dot{\vartheta} R^2 \mathbf{e}_x = \frac{M_T}{I_P} \dot{\vartheta} R^2 \mathbf{e}_x \quad (17)$$

und ist eine mit dem Quadrat des radialen Abstandes R zur neutralen Faser anwachsende Größe, die ihr Maximum, ebenso wie die, allerdings linear von der Balkenmitte anwachsenden Schubspannungen, am äußeren Rand des Querschnittes erreicht. Die zugehörige Leistung folgt zu

$$\begin{aligned} P &= \int_{B_t} \nabla \cdot \mathbf{I} dv = \int_{\partial B_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} da = \int_{\partial B_t} G \vartheta' \dot{\vartheta} R^2 da \\ &= \int_{\partial B_t} \frac{M_T}{I_P} \dot{\vartheta} R^2 da = \frac{M_T}{I_P} \dot{\vartheta} \int_{\partial B_t} R^2 da = M_T \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einer kontinuumsmechanisch begründeten Einführung der Intensität, die für finite Deformationen anhand der einfachen Scherung sowie unter Berücksichtigung typischer Lastfälle diskutiert wird. Die Überlegungen weisen darauf hin, dass sorgfältig zwischen Leistungsflüssen und Intensitätsflüssen zu unterscheiden ist.

Literatur

- [1] Noiseux, D. U.: Measurement of Power Flow in Uniform Beams and Plates. J. Acoustic Society America, Vol 47, No.1 (part 2), 1970, 238-243
- [2] Zhang, Y.: An experimental method for structural intensity and source location. Retrospective Theses and Dissertations, 1993, Iowa State University, USA
- [3] Liu, Z.S.; Lee, H. P.; Lu, C. Passive and active interior noise control of box structures using the structural intensity method. Applied Acoustics 67, 2006, 112–134
- [4] Petrone, G.; Vendittis, M. De; Rosa, S. De; Franco, F.: Numerical and experimental investigations on structural intensity in plates. Comp. Structures 140, 2016, 94–105
- [5] Bertram, A.: Elasticity and Plasticity of Large Deformation, Springer, 2008
- [6] Haupt, P.: Continuum Mechanics and Theory of Materials, Springer, 1999