Ein Verfahren zur Modellbildung für Monte-Carlo-Simulationen im Rahmen des GUM

Tobias Ring[1], Sabine C. Langer[2]

[1] Institut für Konstruktionstechnik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: t.ring@tu-braunschweig.de

[2] Institut für Konstruktionstechnik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: s.langer@tu-braunschweig.de

Einleitung

Die Angabe der Messunsicherheit ist ein notwendiger Bestandteil einer jeden Ergebnisangabe bei Messungen. Sie gibt zusammen mit dem Messergebnis den Bereich an, welcher den wahren Wert der Messgröße mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit beinhaltet [1]. Die Ermittlung der Messunsicherheit ist für einfache Fälle in [1] beschrieben, ein Vorgehen für komplexere Messaufgaben wird in dem „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ (GUM) vorgegeben [3]. In allen Fällen erfordert die Bestimmung der Messunsicherheit eine Modellierung der Messung in Form einer analytisch angebbaren Gleichung. Dies ist jedoch bei der Messung komplexer Systeme nicht immer möglich. In diesem Beitrag wird ein Vorschlag zur Modellierung komplexer Messvorgänge und deren Verwendung zur Ermittlung von Messunsicherheiten gegeben.

Das Rahmenwerk des GUM

Das Rahmenwerk des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ „stellt allgemeine Regeln zur Bestimmung und Angabe von Unsicherheit in Messungen“ [2, S. 1] zur Verfügung. In [3] werden drei Methoden zur Unsicherheitsquantifizierung im Rahmen des GUM genannt, das GUM Rahmenwerk selbst sowie eine analytische Methode und Monte-Carlo-Simulationen.

Das *GUM Rahmenwerk* ermöglicht die Unsicherheitsquantifizierung für lineare Systeme mit normalverteilten Eingangsgrößen. In diesem Fall stellt das GUM Rahmenwerk eine exakte Lösung des Problems der Unsicherheitsfortpflanzung durch Messprozesse dar [3]. Auch für schwach nichtlineare Systeme oder Systeme mit unsymmetrisch verteilten Eingangsgrößen stellt das GUM Rahmenwerk eine praxistaugliche Näherung zur Unsicherheitsquantifizierung zur Verfügung.

Die *Analytische Methode* beschreibt die Verteilungen der Eingangsgrößen mittels algebraischer Ausdrücke und stellt dadurch ebenfalls eine exakte Lösung des Problems dar. Allerdings ist die Anwendung auf relativ einfache Systeme begrenzt, da die Behandlung komplexer Systeme mathematisch sehr aufwändig und unter Umständen unmöglich wird.

Die *Monte-Carlo-Methode* als stochastisches Verfahren zur Unsicherheitsquantifizierung ist universell einsetzbar, da beliebige Verteilungen für die Eingangsgrößen, lineare und nichtlineare Modelle und auch eine große Anzahl an Eingangsgrößen berücksichtigt werden können. Dabei wird bei jeder Iteration der Simulation ein Satz Zufallsvariablen aus den Verteilungen der Eingangsgrößen gezogen und die Ausgangsgröße berechnet. Für eine ausreichend hohe Anzahl an Wiederholungen der Simulation nähert sich die relative Häufigskeitsverteilung der Ausgangsgröße der realen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße an. Aus dieser Verteilung kann dann das Messergebnis nach Mittelwert und Standardunsicherheit ermittelt werden.

Allen Verfahren gemeinsam ist die Notwendigkeit, die Messung durch eine Messgleichung zu modellieren. Dies ist für komplexe Systeme oftmals nicht möglich, wenn das System nicht analytisch beschreibbar ist. Daher wird nachfolgend mittels der Vierpolmethode eine Möglichkeit zur Modellierung komplexer Systeme aufgezeigt. Diese Art der Modellierung führt auf Matrixgleichungen, welche das Systemverhalten linearer Systeme beschreiben und so eine effiziente Darstellung komplexer Systeme zulassen. Aufgrund der sich daraus ergebenden erforderlichen Matrixoperationen kann zur Bestimmung der Unsicherheit im Rahmen des GUM nur die Monte-Carlo-Simulation angewendet werden.

Modellbildung

Die Modellbildung komplexer Prozesse ist nicht immer auf analytischem Wege möglich. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn das strukturdynamische Verhalten einzelner Elemente des Messsystems mit in die Modellierung einbezogen werden muss. Für lineare oder in ausreichenden Grenzen linearisierbare Systeme stellt die Vierpolmethode ein geeignetes Mittel zur Modellierung dar [4, 5]. Abbildung 1 zeigt eine gängige Darstellung eines Vierpols. Ein Vierpol modelliert ein mechanisches System mit den Eingangsgrößen Kraft F_1, der Schnelle v_1 sowie den Ausgangsgrößen Kraft F_2 und der Schnelle v_2. Die Vierpolmethode modelliert somit den Leistungsfluss durch ein System. Die Größen am Ausgang des Systems

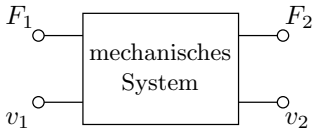

Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Vierpols mit Eingangs-und Ausgangsgrößen

lassen sich unter Kenntnis der Vierpol-Parameter $a_{i,j}$ aus den Eingangsgrößen nach Gleichung (1) berechnen.

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Transfermatrix } \underline{\underline{T}} \\ \text{Vierpolparameter } a_{i,j}}} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Die Ermittlung der Vierpolparameter kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Für einfache, aus Massen, Federn und Dämpfern bestehende Systeme lassen sich die Parameter analytisch berechnen, für komplexe Systeme durch Finite-Elemente-Berechnungen oder Messungen bestimmen. Eine weitere Eigenschaft der Vierpolmethode ist die Möglichkeit, aus vielen Subsystemen bestehende Systeme durch Summation (parallele Systeme) beziehungsweise Multiplikation (serielle Systeme) zu beschreiben. Bei parallelen Systemen wird der Leistungsfluss entsprechend der mechanischen Impedanzen auf verschiedenen, parallelen Pfaden durch das System geführt, die Superposition der Einzelpfade ergibt dann die Ausgangsgrößen. Serielle Systeme sind Systeme, bei denen die Ausgangsgrößen eines Subsystems die Eingangsgrößen des folgenden Systemes darstellen. Für aus i Subsystemen bestehende Systeme lassen sich die Ausgangsgrößen des Systems entsprechend Gleichung (2) berechnen [5].

$$\begin{pmatrix} F_{out} \\ v_{out} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \underline{\underline{T}}_i \cdot \begin{pmatrix} F_{in} \\ v_{in} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Anwendung

Als Anwendungsfall für die Vierpolmethode zur Ermittlung von Messunsicherheiten wird eine Modellmaschine als Testfall verwendet. Als Messaufgabe wird die Ermittlung der Schwingschnelle an einem Messpunkt betrachtet. Die Modellmaschine ist in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt. Das System besteht aus drei Subsystemen, einer Stahl-Rahmenkonstruktion, einer Aluminiumplatte sowie vier Elastomer-Elementen, nachfolgend als Shock-Mounts bezeichnet. Die Körperschallleitung innerhalb des Systems erfolgt über vier Hauptpfade, diese sind in Abbildung 4 dargestellt. Die Anordnung der Subsysteme ist hier seriell, während die Körperschallpfade parallel angeordnet sind. Jeder Körperschallpfad für jedes Subsystem wird durch einen Vierpol repräsentiert, es ergibt sich somit eine Modellierung des Gesamtsystems entsprechend Abbildung 5, bestehend aus zwölf Vierpolen mit insgesamt 48 Vierpolparametern. Die Ausgangsgrößen jedes Körperschallpfades lassen sich mittels der Vierpolmethode entsprechend Gleichung (2) nach Gleichung (3) berechnen. Die Superposition der Ausgangsgrößen aller Pfade ergibt die Ausgangsgröße des Gesamtsystems.

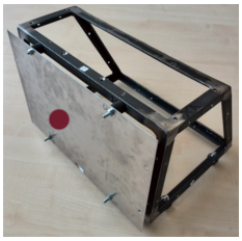

Abbildung 2: Vorderansicht der Maschine, Messpunkt in Rot

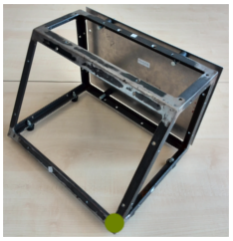

Abbildung 3: Rückansicht, Ort der Krafteinleitung in Grün

$$\begin{pmatrix} F_{out} \\ v_{out} \end{pmatrix} = \left[\underline{\underline{T}}_{Rmn} \cdot \underline{\underline{T}}_{SMnt} \cdot \underline{\underline{T}}_{Plt}\right] \cdot \begin{pmatrix} F_{in} \\ v_{in} \end{pmatrix} \tag{3}$$

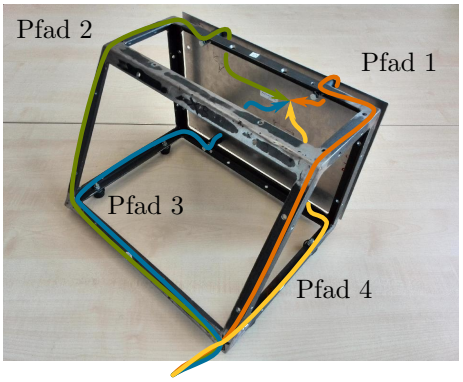

Abbildung 4: Körperschallpfade der Modellmaschine

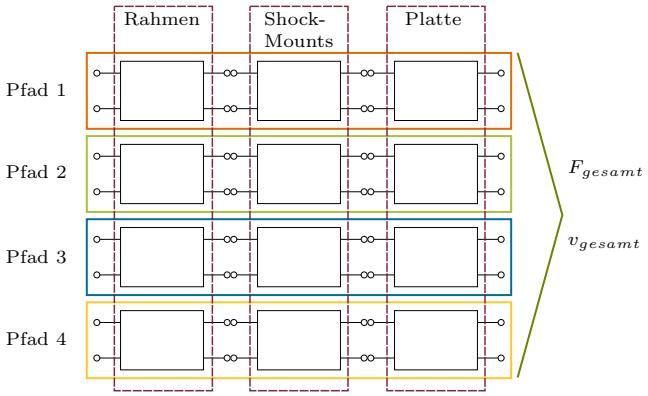

Abbildung 5: Modell der Körperschallpfade

Ergebnisse

Zur Überprüfung der Modellierung wird die Schnelle im Frequenzbereich am Ausgang des Gesamtsystems betrachtet. Verglichen wird die gemessene Schnelle und die berechnete Schnelle am Ausgang des Systems bei Anregung am Systemeingang mit einer Einheitskraft. In Abbildung 6 ist der Frequenzgang dieser Werte im Vergleich dargestellt. Es zeigt sich grundsätzlich eine gute Übereinstimmung hinsichtlich des globalen Verlaufs. Lokale Effekte werden zum Teil nicht abgebildet, wie beispielsweise eine Resonanz bei ca. 270 Hz. Diese Effekte sind möglicherweise auf nichtlineares Sys-

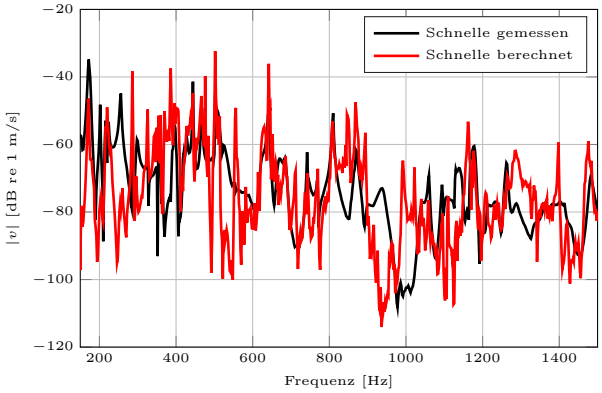

Abbildung 6: Vergleich Schnelle am Ausgang, gemessen und mittels Vierpolmethode aus Eingangsgrößen berechnet

temverhalten, beispielsweise verursacht durch die Shock-Mounts zurückzuführen, welche von der Vierpolmethode nicht berücksichtigt werden können. Insgesamt zeigt die Übereinstimmung dennoch die Anwendbarkeit der Methode, das Modell ist somit validiert.
Die Zerlegung des Gesamtsystems in Subsysteme führt auf die Möglichkeit, die Vierpolparameter auf unterschiedliche Arten bestimmen zu können. Die für Abbildung 6 verwendeten Daten wurden ausschließlich messtechnisch gewonnen. In einem weiteren Schritt wurden die Vierpolparameter für die Aluminiumplatte exemplarisch durch Finite-Elemente-Berechnung ermittelt. In Abbildung 7 wird die auf ausschließlich messtechnischem Wege ermittelte Schwingschnelle aus Abbildung 6 mit der Schwingschnelle verglichen, für deren Ermittlung die Vierpolparameter für Rahmen und Shock-Mounts gemessen und für die Platte berechnet wurden. Auch hier zeigt

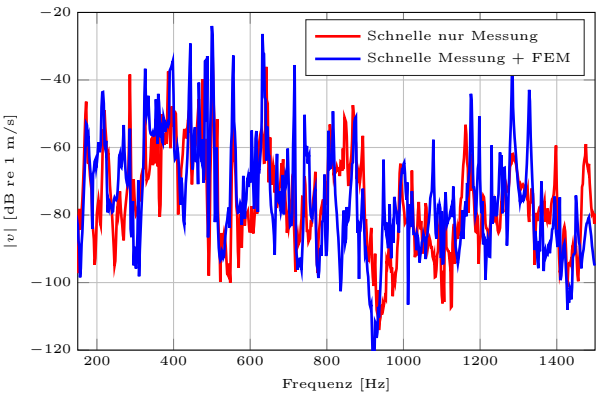

Abbildung 7: Vergleich Schnelle am Ausgang, gemessene und berechnete Vierpolparameter

sich eine gute Übereinstimmung der Frequenzgänge. Neben der Anwendbarkeit der Vierpolmethode auf komplexe Systeme zeigt sich hier die Möglichkeit, die erforderlichen Vierpolparameter auf unterschiedliche Weisen zu ermitteln. Damit ergibt sich grundsätzlich die Möglichkeit, bei der Unsicherheitsquantifizierung auch nicht messtechnisch ermittelbare Systemeigenschaften zu berücksichtigen. Beispielsweise können also Parameter aus anderen Untersuchungen mit in die Analyse einbezogen werden oder, wie hier dargestellt, durch Berechnung ermittelt werden.
Mittels der in Gleichung (3) dargestellten Modellierung des Systems lassen sich Monte-Carlo-Simulationen zur Berechnung der Unsicherheitsfortpflanzung durch das System durchführen. Abbildung 8 zeigt das Simulationsergebnis einer Beispielsimulation mit einer normalverteilten Einzelkraft am Eingang mit dem Wert

$$F_{in} = 10 \pm 3\,\mathrm{N} \quad . \tag{4}$$

Dargestellt ist die relative Häufigkeit der Schwingschnelle am Ausgang über der Frequenz. Zu erkennen ist die Ähnlichkeit mit dem aus Abbildung 6 bekannten Verlauf. Es ergibt sich somit eine Bandstruktur, innerhalb derer die Schwingschnelle im Rahmen der Messunsicherheit liegt. Dabei ist auffällig, das trotz der als über der Frequenz konstant angenommenen Unsicherheit der Eingangsgröße die Unsicherheit der Ausgangsgröße eine Frequenzabhängigkeit aufweist. Beispielsweise ist die Unsicherheit bei 900 Hz deutlich geringer als bei 1300 Hz.

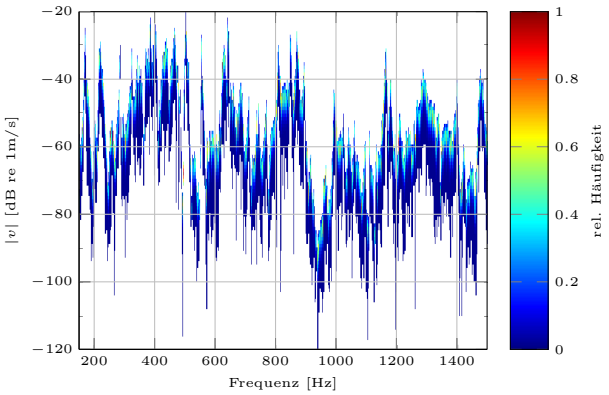

Abbildung 8: Relative Häufigkeitsverteilung der Schnelle am Ausgang

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag konnte die Anwendbarkeit der Vierpolmethode zur Modellierung komplexer Systeme und deren Verwendung zur Quantifizierung von Messunsicherheiten gezeigt werden. Komplexe, nicht analytisch beschreibbare Prozesse lassen sich modellieren und die Vierpolmatrizen bieten eine effiziente Darstellung für numerische Simulationen. Die verwendete Methode beschränkt allerdings die Anwendbarkeit auf lineare Systeme.

Die Methode wurde bisher nur auf SISO-Systeme angewendet, eine Anwendung auf MISO-Systeme stellt den nächsten Schritt dar. Weiterhin besteht die Möglichkeit, aus den Subsystem-Matrizen eine Art Sensitivitätskoeffizienten zu ermitteln, um so die Sensitivität der Gesamtunsicherheit gegenüber den einzelnen Systemelementen untersuchen zu können.

Literatur

[1] DIN 1319-3:1996. Grundlagen der Messtechnik – Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße, Messunsicherheit

[2] Joint Committee for Guides in Metrology. JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement. 2008.

[3] Joint Committee for Guides in Metrology. JCGM 104:2009. Evaluation of measurement data – An introduction to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ and related documents. 2009.

[4] Molloy, C. T., Use of Four-pole Parameters in Vibration Calculations, The Journal of the Acoustical Society of America, 1957, 29(7), pp. 842 – 853

[5] Snowdon, J. C., Mechanical Four-Pole Parameters and their Application, Journal of Sound and Vibration, 1971, 15(3), pp. 307 – 323