Herleitung einer äquivalenten Nachhallzeit für gleiche Sprachverständlichkeit im Nahfeld wie im diffusen Schallfeld

Uwe M. Stephenson

HafenCity University, 20457 Hamburg, Germany, Email: post@umstephenson.de

1.Motivation und Ansatz

Bekanntlich steigt bei gleicher Nachhallzeit die Sprachverständlichkeit nahe der Quelle. Oft, z.B. in der gerade überarbeiteten DIN 18041 [1] implizit, werden deshalb für Räume nur für Nahfeld-Kommunikation höhere tolerable Nachhallzeiten als allgemein angegeben – ohne quantitative Begründung. Diese soll hiermit geliefert werden. Die Frage ist: **Wie groß ist die erforderliche "äquivalente Nachhallzeit" $T_{eq}(r)=T$, damit sich im Semi-Diffusfeld in einem gegebenen Sprecher-Hörer-Abstand r die gleiche Deutlichkeit D ergibt wie sie (ehemals vereinfachend unter Annahme des Diffusen Schallfeldes) einer geforderten Nachhallzeit T_{eff} =T' entspricht?**
D als Energieverhältnis [2] wird der Vorzug gegeben gegenüber etwa dem Sprachverständlichkeitsindex STI. Gemeint sind hier stets Mittelwerte über aller Schallquellen- und Empfänger-Orte.

Dazu wird mit den Annahmen der statistischen Nachhalltheorie aus gemittelten energetischen Impulsantworten das Raummittel des Deutlichkeitsgrades D als Funktion von Nachhallzeit T: $D(T') = D(V,S,\alpha)$, für das semi-diffuse Schallfeld auch vom Abstand r oder als Funktion von Raumvolumen V, Raumoberfläche S, mittlerem Absorptionsgrad $\boldsymbol{\alpha}$ oder Absorptionsexponent

$$\alpha' = -ln(1-\alpha) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} \ldots \approx \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} \qquad (1)$$

abgeleitet: $D(T,r) = D(V,S,\alpha,r)$. Durch Gleichsetzung der Deutlichkeitsgrade $\boldsymbol{D_{DSF} = D(T') = D(T,r,\ldots.) = D_{SDSF}}$ und Inversion der Gleichungen wird die äquivalente Nachhallzeit hergeleitet: $\boldsymbol{T_{equ} = f^{-1}\,(T_{eff},r,V,p,q)}$. Damit die Oberfläche und die mittlere freie Weglänge (MFW)

$$\Lambda = 4V/S \qquad (2)$$

direkt aus dem Volumen folgen, wird ein Quaderraum mit den Proportionen Breite/Höhe $\boldsymbol{p = W/H}$ und Länge/Höhe $\boldsymbol{q = L/H}$ angenommen mit (wie meist) $\boldsymbol{1 \le p \le q \le 3}$. Hier wird meist angenommen: p=2 und q=3. Das erweist sich als keine wesentliche Einschränkung.

2. Definition des "diffusen Schallfeldes" und Nachhallzeit nach Eyring

Die den einschlägigen Nachhallzeitformeln zugrundeliegende Annahme der Geometrisch-Statistischen Raumakustik (neben der, dass die Räume groß gegen die Wellenlängen sein sollen) ist die des diffusen Schallfeldes [3]. Dies ist (wie leider oft unklar bleibt), definiert durch:
A) Isotropie (Richtungsdiffusität): die in jede Richtung fließende Intensität ist konstant;
B) Homogenität: die Energiedichte ist konstant. Damit ist sie gleich der gesamten Schallenergie im Raum pro Volumen: $\boldsymbol{U = E/V}$, und die Intensität ist (c= Schallgeschwindigkeit):

$$I = c \cdot E/V \qquad (3).$$

Daraus folgt auch eine konstante Bestrahlungsdichte auf allen Oberflächen. Es sei daran erinnert: Erst damit macht die Definition einer "äquivalenten Absorptionsfläche" Sinn. Die für ein Diffuses Schallfeld erforderlichen Oberflächen-Eigenschaften sind strenggenommen:
C) alle Oberflächenteile müssen total reflektierend sein (näherungsweise müssen sie klein sein);
D) alle Oberflächenteile müssen total, d.h. Lambert'sch streuend sein (behelfsweise müssen nur „genügend" Flächen streuend sein – eine oft unterschätzte Bedingung).
Unter diesen Annahmen wird nach der (hier bevorzugten) Eyring'schen Theorie der stufenweise Energieabfall eines „repräsentativen" Schallteilchen betrachtet. Ergebnis ist [3], nach Mittelung über viele ST, ein exponentieller Energieabfall

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (4)$$

mit der Nachhallzeitkonstanten $\tau = \frac{\Lambda}{c\,\alpha'}$ (5)
bzw. der Nachhallzeit für 60dB Abfall:

$$T = 6\,ln(10)\,\tau \approx 0.163\,\frac{V}{S\cdot\alpha'} \qquad (6)$$

Der Zusammenhang zwischen Anzahl Reflexionen k und Laufzeit t ist dabei $k = \frac{t}{\Delta t} = ct/\Lambda$ (7)

mit der Laufzeit für eine freie Weglänge $\Delta t = \Lambda/c$ (8).

Wichtig: t=0 ist hier der Aussendezeitpunkt eines Impulses ab der Quelle (denn unmittelbar danach beginnt der Energieabfall). Man kann übrigens zeigen: die mittlere Laufzeit des Direktschalls ist $\Delta t/3$; die mittlere Ankunftszeit k. Reflexionen ist $k\Delta t$ (unabhängig vom Direktschall).

3. Mittelwert der Deutlichkeit im diffusen Schallfeld (DSF)

Die Deutlichkeit D ist nach [2] definiert als der Energieanteil der bis 50ms verzögert nach dem Direktschall eintreffenden Energie

$$D = \frac{\int_{t_{dir}}^{t_{dir}+t_{Deu}} I(t)dt}{\int_{t_{dir}}^{\infty} I(t)dt} \qquad (9).$$

mit $t_{Deu} = L'/c = 50ms$, $L' = 17m$ und $t_{dir} = r/c$ (10) (Ankunftszeit Direktschall). Dimensionslose, auf die MFW bezogene Parameter sind: $l' = L'/\Lambda > 1$ und $r' = r/\Lambda$ (11). Einsetzen von $I(t)$ nach Glngn. (3-5) in (9) ergibt

$$\boldsymbol{D_{DSF} = 1 - e^{-t_D/\tau}} \qquad (12).$$

Nebenher kann abgeleitet werden: $e^{-t_{Deu}/\tau} = e^{-L'/\Lambda\cdot\alpha'} = \left(e^{-\alpha'}\right)^{l'} = e^{-0.3s\cdot\ln(10)/T} = 10^{-0.3s/T} \approx 2^{-1/T}$ (13)

Damit ergibt sich, wie gewünscht, die einfache Beziehung

$$\boldsymbol{D_{DSF} = 1 - 2^{-1/T}} \qquad \textbf{(14).}$$

zwischen Nachhallzeit und mittlerer Deutlichkeit im DSF. Wie erwartet, ergibt sich für $T \to \infty$, $D \to 0$ und für $T \to 0$, $D \to 1$, und z.B. für T=1s, $D = 0.5$ (s. untere gestrichelte Kurve in Bild 3).

4. Mittelwert der Deutlichkeit im semi-diffusen Schallfeld (SDSF)

Beim SDSF wird der Beitrag des Direktschalls zur immittierten Schallintensität gesondert nach dem "r^2-Gesetz" des Freifeldes behandelt [4]. Bei Impulsanregung mit der Energie E_0 bedeutet das zur Zeit $t_{dir} = r/c$ einen δ-Impuls der Stärke (Intensität*Zeit) (Bild 1 links):

$$J_0 = E_0/(4\pi \cdot r^2) \qquad (15)$$

Hinzu kommt der Intensitätsbeitrag des Diffusfeldes mit Ausnahme des Direktschalls, eine exponentiell abklingende Intensität mit der gleichen Nachhallzeit wie im DSF; dies jedoch nicht ab $t = 0$, sondern ab dem Zeitpunkt, an dem im Mittel die ersten Reflexionen erster Ordnung eintreffen (Bild 1 rechts). Dieser Zeitpunkt ist sorgfältig zu schätzen.

Die mittlere Ankunftszeit der ersten Reflexionen

Im Diffusfeld hat jede durch einen Punkt S gehende Gerade (Bild 2) im Mittel über alle Orientierungen die Länge der mittleren freien Weglänge Λ. Gleichverteilung im Raum bedeutet auch Gleichverteilung auf einer Geraden. Im Mittel ist also S in der Mitte einer Geraden. Der mittlere Weg von S zur Oberfläche ist dann (bei zufälliger Wahl der Richtung) $\Lambda/2$; der mittlere kürzere Weg von beiden von S zur Oberfläche nach *P* ist also $\Lambda/4$. Aus Symmetriegründen gilt das Gleiche von P nach E. Der mittlere zurückgelegte Weg von Reflexionen 1. Ordnung zu einem Empfänger ist die Summe, also Λ. Der mittlere Weg von ***ersten*** Reflexionen 1. O. aber ist $\Lambda/2$. Deren mittlere Ankunftszeit beträgt also:

$$\Delta t/2 = \Lambda/(2c) \qquad (16).$$

Dies bestätigt sich auch durch eine energetische Betrachtung [5]. (Obwohl die Zeitbereiche für Reflexionen *k.* Ordnung größer als $\boldsymbol{\Delta t}$ sind, sich also überlappen, wird also vereinfachend eine Streuung um nur $\boldsymbol{\pm\Delta t/2}$ angenommen).

Die mittlere Intensitäts- Zeitfunktion des semi-diffusen Schallfeldes setzt ich nun also aus dem *peak* des Direktschalls, gefolgt von einer Zeitlücke bis zum Einsetzen der ersten Reflexionen und einem (näherungsweise) kontinuierlich- exponentiellen Nachhall entsprechend Glngn. 3,4 zusammen (siehe Bild 1):

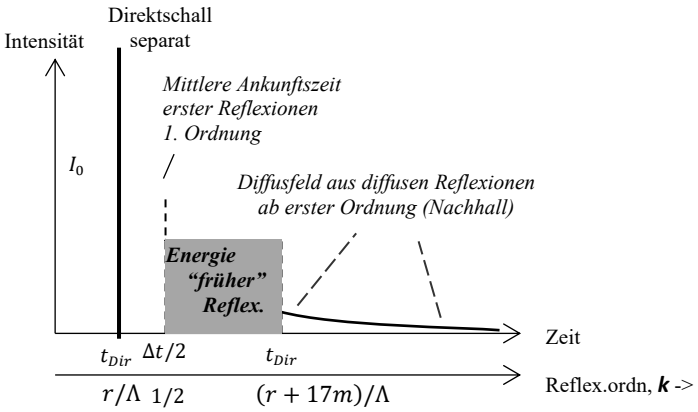

Bild 1: Schematisierte energetische Impulsantwort im semi-diffusen Schallfeld: links Direktschall-peak, rechts, einsetzend zum Zeitpunkt $t_1 = \Lambda/(2c) = \Delta t/2$, die exponentiell abklingende Intensität des Nachhalls; schattiert, der Zeitbereich früher Reflexionen nach der Definition der Deutlichkeit ($t_{Deu} = 50ms$). Parallel zur Zeitachse eine Achse in Einheiten der mittleren Reflexionsordnung $k = ct/\Lambda$. Es gilt praktisch immer: $t_{dir} < \Delta t/2 < t_{dir} + t_{Deu}$.

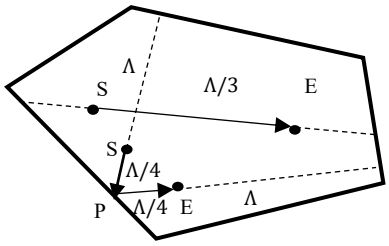

Bild 2: Mittlere Laufstrecken Direktschall und erste Reflexionen

Die mittlere Intensitäts- Zeitfunktion lautet nun also:

$$\boldsymbol{I(t,r) = \frac{E_0}{4\pi \cdot r^2} \cdot \delta(t - r/c) + \left[\frac{c \cdot E_0}{V} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_{g\ddot{u}ltig\ ab\ t > \frac{\Lambda}{2c}}} \quad \textbf{(17).}$$

Die daraus folgende Deutlichkeit ***D*** im Abstand ***r*** von der Quelle ergibt sich durch Einsetzen von Glng. 17 in Glng. 9. Der Zähler dort ist

$\int_{t_{dir}}^{t_{dir}+t_{Deu}} I(t)dt = \frac{E_0}{4\pi \cdot r^2} + \frac{c \cdot E_0 \cdot \tau}{V}\left(e^{-\Delta t/(2\tau)} - e^{-(t_{dir}+t_{Deu})/\tau}\right)$,

der Nenner $\int_{t_{dir}}^{\infty} I(t)dt = \frac{E_0}{4\pi \cdot r^2} + \frac{c \cdot E_0 \cdot \tau}{V} \cdot e^{-\Delta t/(2\tau)}$ (18a,b),

der Quotient ist (nach einigen Umformungen mit den Glngn. 8,5,1,2, woraus folgt $\Delta t/\tau = \alpha'$ und $e^{-\Delta t/(2\tau)} = \sqrt{\rho}$)

$$D_{SDSF}(r,T,\rho,\alpha',\Lambda,S) = \frac{\frac{S \cdot \alpha'}{16\pi \cdot r^2\sqrt{\rho}} + 1 - \rho^{(r/\Lambda - 1/2)} \cdot 2^{-1/T}}{\frac{S \cdot \alpha'}{16\pi \cdot r^2\sqrt{\rho}} + 1} \qquad (19)$$

An dieser Stelle scheint es nützlich, den Begriff "Hallradius" einzuführen. Der Hallradius $\boldsymbol{r_H}$ ist definiert als der Abstand ***r***, bei dem die Intensität des Direktschalls gleich der durch den gesamten Nachhall ist. Als letzterer wird, wie oben begründet, der ab der Zeit für eine halbe freie Weglänge $\Delta t/2 = \Lambda/(2c)$ eintreffende Schall gewertet. Daraus folgt [5] ein **Hallradius** von

$$r_H = \sqrt{\frac{S \cdot \alpha'}{16\pi \cdot \sqrt{\rho}}} \approx \sqrt{\frac{S \cdot \alpha}{16\pi \cdot (1-\alpha)}} = \sqrt{\frac{S}{16\pi}} \cdot \sqrt{e^{\alpha'} - 1} \qquad (20a,b)$$

(Die Näherung beruht hier auf der Näherung von Glng. 1)
Der Hallradius geht nach dieser Formel richtigerweise gegen unendlich, falls der mittlere Absorptionsgrad des Raumes gegen 1 d.h. Totalabsorption geht.
Einsetzen des ersten Terms in Glng. 19 ergibt

$$D_{SDSF}(r,T,r_H,\Lambda,\rho) = 1 - \frac{\rho^{(r/\Lambda - 1/2)} \cdot 2^{-1/T}}{(r_H/r)^2 + 1} \qquad (21)$$

wobei die mittlere freie Weglänge Λ noch vom Volumen ***V*** und der Oberfläche ***S*** oder den Raumproportionen ***p,q*** abhängt, der Reflexionsgrad ρ aus der Nachhallzeit T folgt, ebenso der Hallradius r_H (Bild 3).

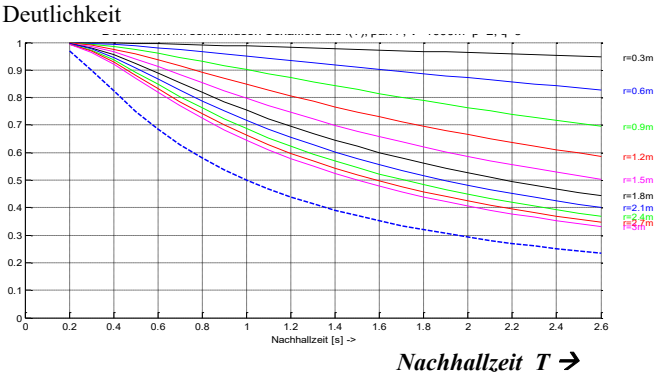

Bild3: Deutlichkeit im semi-diffusen Schallfeld als Funktion der Nachhallzeit und des Quellen-Empfänger-Abstandes r=0.3…3m (=halbe mittlere MFW) als Parameter; hier Raumvolumen V=1000m³, Proportionen p=2, q=3, unterste Kurve für das DSF.

Geht dann der Abstand $r \to 0$, so geht die Deutlichkeit $D_{SDSF} \to 1$. Geht dagegen $r \to \infty$, so geht – bei kleinen Abs.graden $\alpha \to 0$ bzw. $\rho \to 1$ die Deutlichkeit gegen den Wert des diffusen Schallfeldes (Bild 3).

Spezialisierung auf einen Quaderraum

Um Oberfläche S und MFW Λ aus den Gleichungen eliminieren zu können, werden o.g. Proportionen $p = W/H$ und $q = L/H$ eingeführt, wobei $\mathbf{1 \le p \le q \le 3}$. Damit ist

$$V = H \cdot W \cdot L = H^3 \cdot p \cdot q \quad \text{bzw.} \quad H(V) = \sqrt[3]{V/(pq)}$$

$$S(V) = \left(V/(pq)\right)^{2/3} \cdot 2(p + q + pq) = 4H^2 \cdot pq/n$$

und $$\Lambda(V) = n \cdot H = n \cdot \sqrt[3]{V/(pq)} \qquad (22a\text{-}c)$$

mit $$n = \frac{2pq}{(p+q+pq)} \qquad \text{wobei} \quad \frac{2}{3} \le \mathrm{n} \le \frac{6}{5} \qquad (23).$$

Durch Einsetzen von Glng. 22a-c in 20b wird der Hallradius substituiert durch

$$r_H = H\sqrt{\frac{pq}{4\pi \cdot n}} \cdot \sqrt{e^{\alpha'} - 1} = \Lambda \cdot m \cdot \sqrt{e^{\alpha'} - 1} \qquad (24)$$

mit $$m = \sqrt{\frac{pq}{4\pi \cdot n^3}} \qquad (\boldsymbol{m} = 0.52\ldots0.64) \qquad (25).$$

5. Äquivalente Nachhallzeit für gleiche Deutlichkeit im Nahfeld

Nun war es das Ziel, die im SDSF erforderliche äquivalente Nachhallzeit $\boldsymbol{T \equiv T_{equ}(r)}$ für gleiche Deutlichkeit $\boldsymbol{D}$ anzugeben wie sie unter Annahme des Diffus-Feldes unter Nennung einer Soll-Nachhallzeit $\boldsymbol{T' \equiv T_{eff}}$ angestrebt war. Es wird also gleichgesetzt:

$$\boldsymbol{D_{DSF} nach\ Gl.14 = D_{SDSF}\ nach\ Gl.21}$$

Daraus folgt $$2^{-1/T'} = \frac{\rho^{(r/\Lambda - 1/2)}}{(r_H/r)^2+1} \cdot 2^{-1/T} \qquad (26)$$

logarithmiert, gekürzt durch $ln2$ und mit $\alpha' = -\ln(\rho)$:

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{ln2}\left[ln\left((r_H/r)^2 + 1\right) + \alpha'(r' - 1/2)\right] + \frac{1}{T} \quad (27)$$

Mit Glng. 24 bzw. $(r_H/r)^2 = (m/r')^2 \cdot \left(e^{\alpha'} - 1\right)$ wird besser der Hallradius wieder eliminiert: (28)

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{ln2}\left[ln\left((m/r')^2 \cdot \left(e^{\alpha'} - 1\right) + 1\right) + \alpha'(r' - 1/2)\right] + \frac{1}{T}$$

Diese Glg. gibt die Soll- Nachhallzeit als Funktion der äquivalenten (tatsächlichen) und des rel. Abstandes $r' = r/\Lambda$ an: $T' = f(T, r')$, wobei noch m und Λ von p, q und α' von T,V,p,q abhängen. Der Graph sieht wie der invertierte von Bild 4 aus. Verlangt ist aber die Umkehrung: $T = f^{-1}(T', r')$ Dazu ist es günstig, statt T und α' nur eine Variable zu haben. Deshalb wird (nach Glngn. 5,6) ersetzt $\frac{1}{T} = \frac{c\,\alpha\prime}{6\ln(10)\cdot\Lambda}$ und analog ein Absorptionsexponent zur effektiven Nachhallzeit T‘ eingeführt durch $\frac{1}{T'} = \frac{c\,\beta\prime}{6\,ln(10)\cdot\Lambda}$ (29)

Beides eingesetzt in Glng. 27 liefert (mit Glngn.11) $\beta' = 1/l'\left[ln\left(\left(\frac{m}{r'}\right)^2 \cdot \left(e^{\alpha'} - 1\right) + 1\right) + \alpha'\left(r' - \frac{1}{2}\right)\right] + \alpha'$ (30).

Diese Gleichung ist leider nicht analytisch nach α' auflösbar, deshalb wurde sie numerisch gelöst, d.h. die Nullstelle von

$$\beta'(\alpha', r', l', m) - \beta' = 0 \qquad (31)$$

bestimmt, woraus Werte für $\alpha'(\beta', r', l', m)$ folgen. Durch Rücksubstitution (Glngn. 29) können schließlich Werte für die Funktion $T_{equ} = f^{-1}(T', r', l', m) = g(T', r, V, p, q)(32)$ bestimmt werden. Bild 4 zeigt die berechneten äquivalente Nachhallzeiten als Funktion der effektiven Nachhallzeit.

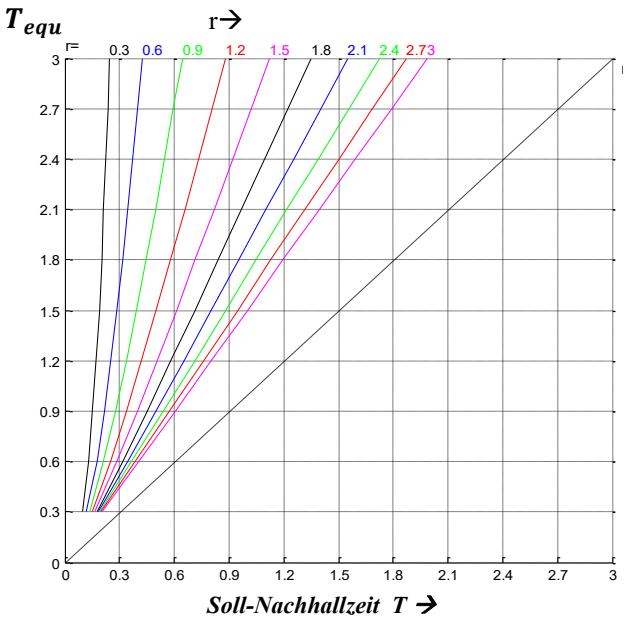

Bild 4: Äquivalente Nachhallzeiten $\boldsymbol{T_{equ}}$ nach der invertierten Glng 28 (numerische Lösung Glng. 32) als Funktion der effektiven Nachhallzeit $\boldsymbol{T' \equiv T_{eff}}$ mit dem Sender-Empfänger-Abstand r=0.3…3m (= halbe MFW) als Parameter; hier für *V=1000m³, p=2, q=3.* Ein qualitativ ähnlicher Graph ergibt sich bei fixem Abstand, aber variierendem Volumen, ansteigend für V =30…30000m³.

Die äquivalenten Nachhallzeiten im Nahfeld sind, wie erwartet, länger als für das Diffusfeld vorgegeben. Sie steigen nahezu linear, sind anscheinend um einen konstanten Faktor höher, der vom Sender-Empfänger-Abstand r und vom Raumvolumen abhängt, zunehmend mit sinkendem Abstand.

6. Empfohlene maximale äquivalente Nachhallzeiten für ausreichende Deutlichkeit im Nahfeld

Oft werden empfohlene maximale Nachhallzeiten als Funktion des Raumvolumens angegeben, meist schwach logarithmisch mit V steigend (z.B. für Sprache in DIN 18041:

$$T_s = 0.37 * log10(V) - 0.14 \qquad (33)$$

(s. untere Gerade in Bild 5).

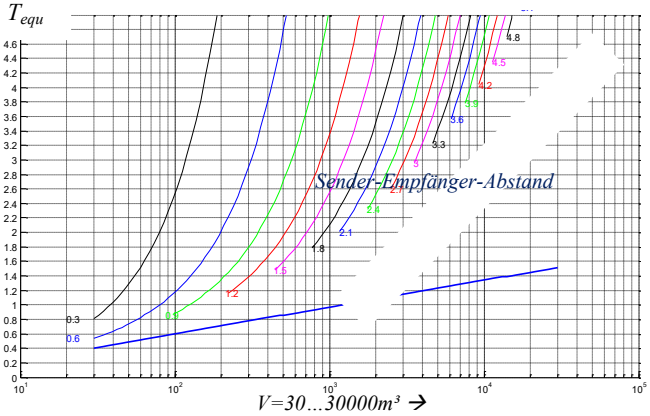

Bild 5: Empfohlene maximale äquivalente Nachhallzeiten im SDSF für ausreichende Deutlichkeit im Nahfeld mit dem Sender-Empfänger-Abstand als Parameter
(untere Gerade: Sollnachhallzeit im DSF nach DIN 18041)

Damit steigt in den o.g. Beziehungen auch ***V*** mit ***T'***, damit auch die MFW Λ; und es sinkt mit steigendem Volumen auch der relative Sender-Empfänger-Abstand $r' = r/\Lambda$. Statt dass ***D*** sinkt, steigt die tolerable maximale „äquivalente" Nachhallzeit, siehe die zunehmend steigenden Kurven in Bild 5.

Beispiele: bei V=200m³ (Klassenzimmer) ist $T_{soll} = 0.7s$, bei r=0.9m: $T_{equ} = 1.3s$, bei r=0.6m: $T_{equ} = 2.1s$, bei r=0.3m: $T_{equ} = 5s$. Bei V=10000m³ und p=2, q=3, ist H=11.856m, $\Lambda = 12.934m$, $\alpha' = 0.392$, $r_H = 5.43m$ und bei r=4.2m, $T_{equ} = 4.2s$.

Die äquivalenten Nachhallzeiten steigen naturgemäß mit sinkenden Abständen und sind bei Abständen nahe dem Hallradius wesentlich größer. (Die maximal betrachteten Abstände ***r*** steigen mit dem Volumen, da sie „im Nahfeld" maximal eine MFW betragen sollen.)

6. Bewertung und offene Fragen

Im Nahfeld sind tolerable Nachhallzeiten sehr viel länger als sonst für das Diffusfeld empfohlen – jetzt analytisch nachgerechnet. Das ist ziemlich unabhängig von den Raumproportionen.

Die Ergebnisse bedürfen keiner Verifizierung durch Messungen, denn sie basieren auf bekannten analytischen Zusammenhängen.

Allerdings wurde vernachlässigt:

Die in DIN 18041 empfohlenen Nachhallzeiten könnten schon den Effekt besserer Sprachverständlichkeit im Nahfeld berücksichtigt haben; wenn dies so ist, würden die äquivalenten Nachhallzeiten kürzer sein.

Einfluss der Störung durch Dritte: andere Sprecher oder Parallel- Unterhaltungen oder -Unterricht, Hintergrund-geräusche; dies würde niedrigere effektive und äquivalente Nachhallzeiten erfordern.

Literatur

[1] DIN 18041: Hörsamkeit in kleinen bis mittelgroßen Räumen, Mai 2004, Beuth-Verlag, Berlin

[2] DIN EN ISO 3382: Akustik - Messung von raumakustischen Parametern; Teil1: Aufführungsräume; Teil 2: Nachhallzeit in gewöhnlichen Räumen, International Standards Organization, Geneva, Switzerland, (2009)

[3] Stephenson, U.M.: Different assumptions - different reverberation formula ; in: proc. of Internoise, New York, 2012

[4] Fasold, W.; Veres, E.; Schallschutz und Raumakustik in der Praxis. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1998

[5] Stephenson, U.M.: The equivalent reverberation time for same definition in the near field of a semi-diffuse sound field; in: proc.of Internoise, San Francisco, 2015