

Azimutalmodenanalyse in Strömungskanälen von Turbomaschinen bei starker Unterabtastung mittels Compressed Sensing

Roman Kisler¹, Maximilian Behn², Lars Enghardt², Ulf Tapken²

¹ Technische Universität Berlin - ISTA, 10623 Berlin, Deutschland, Email: Ro.Kisler@gmx.de

² DLR: Institut für Antriebstechnik, Abteilung Triebwerksakustik, 10623 Berlin, Deutschland

Email: Maximilian.Behn@dlr.de, Lars.Enghardt@dlr.de, Ulf.Tapken@dlr.de

Einleitung

Bei der Triebwerksakustik ist die Minimierung tonaler Anteile von großer Bedeutung. Eine Ursache dieses tonalen Lärms liegt in der Interaktion zwischen dem Rotor und dessen benachbartem Stator. Aufgrund der ringförmigen Geometrie eines Triebwerkes setzt sich das Schallfeld aus einer Superposition diskreter räumlicher Moden zusammen. Tyler und Sofrin stellten bereits 1962 [1] fest, dass durch die Rotor-Stator-Interaktion vor allem vereinzelte azimutale und radiale Moden dominant sind und somit die Lautheit bestimmen. Das Ziel stellt deshalb die Minimierung der Leistung jener Tyler-Sofrin-Moden dar.

Die heutige digitale Signalverarbeitung fußt auf dem Nyquist-Shannon Abtasttheorem. Es ermöglicht eine exakte Rekonstruktion kontinuierlicher bandbegrenzter Signale mittels endlicher, diskreter Messungen. Es bedarf dafür lediglich einer Abtastrate, die dem Doppelten der maximalen Frequenz des Signals entspricht. Wird diese kritische Abtastrate unterschritten, ist die Eindeutigkeit der Rekonstruktion nicht mehr gegeben und Aliasing tritt auf.

Die Verbindung zwischen dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem und den Messungen des Triebwerkslärms besteht darin, dass die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden aufgrund der geometrischen Randbedingungen limitiert ist und das räumliche Signal somit bandbegrenzt ist. Diese Eigenschaft ermöglicht die Anwendung des Abtasttheorems. Entlang des Umfanges und Radius gleichmäßig angebrachte Mikrofonarrays gewähren eine hoch genaue Rekonstruktion des gesamten Modenspektrums, solange die Mikrofonanzahl mindestens dem Zweifachen der maximal ausbreitungsfähigen Modenordnung entspricht.

Bei hohen Drehzahlen, wie sie beispielsweise in Triebwerken während des Take-Offs auftreten, breiten sich derart viele Moden aus, dass mehrere hundert Mikrofone notwendig sind, womit der Aufwand zur Anschaffung, Montage, Kalibrierung und Auswertung steigt.

Die hier angewendete Methode des Compressed Sensing ermöglicht eine starke Reduzierung der Mikrofonanzahl, sodass trotz der Verletzung des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems eine präzise Approximation dominanter Moden möglich und Aliasing vermieden wird.

Azimutalmodenanalyse

Aus der Wellengleichung für ringförmige Kanäle, einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, lässt sich herleiten, dass sich der Schalldruck an einer azimutalen Position θ_k als Linearkombination von komplexen Modenamplituden A_m und komplexen Exponentialtermen darstellen lässt:

$$p_k = \sum_{m=-M}^M A_m e^{im\theta_k}. \quad (1)$$

Dabei stellt m die Modenordnung dar. Aufgrund physikalischer Eigenschaften der Strömung und geometrischer Randbedingungen sind nur $|m| \leq M$ Moden ausbreitungsfähig. Abbildung 1 illustriert die modalen Strukturen im Schallfeld eines Ringkanals. Die schwarzen Punkte repräsentieren ein äquidistant am Umfang angeordnetes Mikrofonarray mit 100 Mikrofonen. Für K Mikrofone

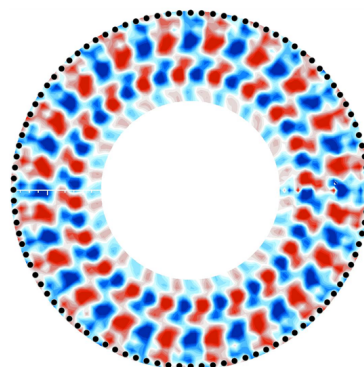


Abbildung 1: Modale Struktur des Schalldruckes im Querschnitt eines ringförmigen Kanals zu einem festen Zeitpunkt, Frequenz und axialen Position

kann Gleichung (1) als lineares Gleichungssystem formuliert werden, wenn $\Psi_{k,m} = e^{im\theta_k}$ definiert wird:

$$p = \Psi A, \quad (2)$$

mit $p \in \mathbb{C}^K$, $\Psi \in \mathbb{C}^{K \times (2M+1)}$ und $A \in \mathbb{C}^{2M+1}$. Bekannt ist der Messvektor p , während der azimutale Modenvektor A gesucht ist. Es handelt sich demnach um ein inverses Problem. Liegt der Fall $K \geq 2M + 1$ vor und sind die Mikrofone äquidistant angeordnet, sodass $\theta_k = 2\pi k/K$, dann ist das Nyquist-Kriterium erfüllt und eine exakte Rekonstruktion durch die diskrete Fourier-Transformation (kurz: DFT) ist möglich.

$$A = \frac{1}{K} \Psi^H p \quad (3)$$

Unterabtastung tritt ein, wenn das Abtasttheorem verletzt wird. Das Gleichungssystem ist damit unterbestimmt, wodurch räumliches Aliasing hervorgerufen wird.

Von Rademaker et al. [2] wurde hierzu eine unregelmäßige Anordnung der Mikrofone vorgeschlagen. Anstelle des Aliasings tritt ein breitbandiges Gitterrauschen auf, wodurch dominante Moden weiterhin identifiziert werden können. Trotz Optimierung des Gitters zur Verringerung des Gitterrauschens stößt die Anwendung der DFT bei unregelmäßige Gitteranordnungen hinsichtlich der Dynamik an dessen Grenzen. Rademakers optimiertes Gitter mit 100 Mikrofonen erreicht für die ausgelegte Bandbreite von $M = 79$ und bei optimaler Signalqualität eine maximale Dynamik von 20 dB [3]. Eine Reduzierung der Sensoranzahl bei gleichbleibender Modenbandbreite würde in einer Verschlechterung des Signal-Rausch-Verhältnisses im analysierten Spektrum führen. Enthält das Signal zudem mehrere dominante azimutale Modenordnungen, so wirkt sich das zusätzlich negativ auf die Dynamik aus. Diese Eigenschaften schränken das Einsatzgebiet der DFT bei unregelmäßigen Gittern stark ein.

Compressed Sensing

Compressed Sensing (kurz: CS) ermöglicht eine eindeutige Lösung unterbestimmter Gleichungssysteme unter der Annahme, dass der Lösungsvektor dünnbesetzt ist, also nur ein geringer Anteil seiner Einträge von Null verschieden ist. Obwohl die Algorithmen zur Berechnung dünnbesetzter Lösungen schon früher bekannt waren [5], wurde das mathematische Fundament erst 2006 von Candés, Romberg und Tao sowie Donoho [6, 7] gelegt und gelangte somit erneut in den Fokus der Forschung.

Die Kernaussage des Compressed Sensing besteht darin, dass sich die dünnbesetzte Lösung des unterbestimmten ($K < 2M + 1$) Gleichungssystems in Gleichung (2) eindeutig bestimmen lässt, wenn folgendes Optimierungsproblem gelöst wird:

$$\tilde{A} = \arg \min_A \|A\|_0 \quad \text{gemäß} \quad \Psi A = p. \quad (4)$$

In Worte gefasst bedeutet das, dass die dünnbesetzteste Lösung gesucht wird, die das Gleichungssystem erfüllt. Candés et al. konnten in [7] zeigen, dass anstelle der l_0 -Pseudonorm die l_1 -Norm zum gleichen Ergebnis führt. Der wesentliche Unterschied liegt in der Umsetzbarkeit, da es sich bei der l_1 -Norm im Gegensatz zur l_0 -Pseudonorm um ein konvexes Minimierungsproblem handelt und somit effizient gelöst werden kann.

Unter realen Bedingungen ist der Modenvektor A selten dünnbesetzt, sondern besitzt neben dominanten Anteilen in den Tyler-Sofrin-Moden weitere von Null verschiedene, aber deutlich kleinere Einträge. Derartige Signale werden als kompressibel bezeichnet. Die gemessenen Werte p setzen sich somit aus einem Signalanteil ΨA_S und einem Rauschanteil e zusammen:

$$p = \Psi A_S + e = \Psi A. \quad (5)$$

Candés et al. zeigt in [8], dass eine Minimierung der l_1 -Norm unter Anpassung der Nebenbedingung an das Rauschniveau $\|e\|_2 = \epsilon$ ebenfalls zu der besten dünnbesetzten Approximation des tatsächlichen Modenspektrums führt:

$$\tilde{A} = \arg \min_A \|A\|_1 \quad \text{gemäß} \quad \|\Psi A - p\|_2 \leq \epsilon \quad (6)$$

$$\Rightarrow \|\tilde{A} - A_S\|_2 \leq C_1 \epsilon, \quad (7)$$

wobei es sich bei \tilde{A} um das dadurch rekonstruierte Modenspektrum und bei C_1 um eine Konstante handelt. Compressed Sensing ermöglicht somit auch eine Rekonstruktion kompressibler Signale, dessen obere Fehlerschranke $C_1 \epsilon$ beispielsweise durch die Annahme eines normalverteilten Rauschens weiter spezifiziert werden kann, siehe dazu [5].

Ein großes Interesse bzgl. Compressed Sensing liegt in der Frage, wie viele Messungen zur erfolgreichen Analyse mindestens notwendig sind. Der Erfolg der Rekonstruktion ist stark an die Sensing-Matrix Ψ geknüpft. Bei der Azimutalmodenanalyse handelt es sich dabei um eine Fourier-Matrix, wofür in [9] anhand einer probabilistischen Untersuchung eine untere Schranke für die Mikrofonanzahl gegeben wird:

$$K \geq C_2 \cdot s \log^4(2M + 1). \quad (8)$$

Dabei handelt es sich bei der Variable s um die „Sparsity“ (Anzahl von Null verschiedener Einträge) des gesuchten Signals A_S und bei C_2 um eine Konstante. Die Zeilen, und somit gleichbedeutend die Mikrofonpositionen, von Ψ wurden dabei zufällig aus der äquidistanten Fourier-Matrix gezogen. Besteht das Interesse beispielsweise an einer Rekonstruktion einer einzelnen dominanten Mode $s = 1$ im verrauschten Messsignal und wird darüber hinaus ein Modenspektrum der Bandbreite $|m| \leq 79$ betrachtet, so liegt die notwendige Mindestanzahl von Mikrofonen für die Anwendung von Compressed Sensing im Bereich $K \approx 24$. Zum Vergleich: Zur Einhaltung des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems wären $K \geq 159$ Mikrofone vonnöten.

Im Gegensatz zur probabilistischen Betrachtung bietet das Konzept der Kohärenz $\mu \leq 1$ eine deterministische Überprüfung der Güte der Rekonstruktion. Sie stellt ein Maß für die maximale Kollinearität der Matrix-Spalten zueinander dar und lässt sich einfach und effizient berechnen [5].

$$\mu = \max_{1 \leq j < k \leq 2M+1} \frac{|\langle \Psi_j, \Psi_k \rangle|}{\|\Psi_j\|_2 \|\Psi_k\|_2} \quad (9)$$

Hierbei steht Ψ_j für die j -te Spalte von Ψ . Aus [5] geht hervor, dass eine geringe Kohärenz, bei Existenz von Rauschen, zum einen die maximale Anzahl rekonstruierbarer dominanter Moden erhöht und zum anderen die Genauigkeit steigert. Die Kohärenz bietet somit einen geeigneten Parameter zur Optimierung eines unregelmäßigen Mikrofonarrays hinsichtlich dessen Anwendung mit Compressed Sensing.

Numerische Ergebnisse

Es existieren zahlreiche Algorithmen zur Rekonstruktion dünnbesetzter Lösungen, die jeweils spezielle Randbedingungen erfüllen. Von der Beschreibung und der Unterscheidung wird hier abgesehen und auf eine detaillierte Übersicht in [5, 10] verwiesen. Erste numerische Untersuchungen bezüglich der akustischen Modenanalyse mit CS sind in [11] durchgeführt worden. Darin wurden gänzlich zufällige Gitter mit einer l_1 -Minimierung untersucht.

Der hier verwendete Algorithmus gehört zu der Klasse der „greedy“ Algorithmen und war bereits vor den Veröffentlichungen von Candés et al. weit verbreitet [5]. Das sogenannte Orthogonal Matching Pursuit (kurz: OMP) [4] führt keine direkte konvexe Optimierung durch, sondern basiert auf einer iterativen Berechnung der Lösung. Der Grund für die Wahl dieses Algorithmus liegt in der hohen Stabilität und Genauigkeit, die der l_1 -Minimierung sehr nahe kommt, und der Geschwindigkeit, da der Algorithmus nach maximal K Iterationen konvergiert [5]. Ein weiteres entscheidendes Kriterium stellt die direkte Verbindung des Algorithmus zur Kohärenz in Gleichung (9) dar, wodurch eine Optimierung des Gitters hinsichtlich dieses Parameters zusätzlich einen entscheidenden und nachvollziehbaren Einfluss auf die Güte der Approximation hat.

Synthetische Signale

Für die Untersuchung der Analysegenauigkeit wird zunächst ein synthetischer Modenvektor A gewählt. Anschließend wird durch die Wahl der Mikrofonpositionen und -anzahl die Systemmatrix Ψ berechnet. Mit Gleichung (2) kann dadurch der Schalldruckvektor bestimmt werden. Um reale Messungen zu simulieren, wird zusätzlich zu den dominanten, zufällig gewählten Tyler-Sofrin-Moden ein weißes Rauschen überlagert, welches im Triebwerk unter anderem durch Turbulenz und Instationarität der Strömung verursacht wird. Abbildung 2 vergleicht die aus dem CS und der DFT gewonnenen Modenspektren. Zur perfekten Rekonstruktion der gesamten Bandbreite bedarf es hierbei nach dem Abtasttheorem $K = 81$ Mikrofone, da $M = 40$ gewählt wurde. Im unregelmäßigen Vergleichsgitter wurden 15 Mikrofone derart angeordnet, dass die Kohärenz minimal und Gleichung (8) mit $C_2 \approx 0,4$ erfüllt ist. Bei geringeren Signal-Rausch-Abständen wären größere Konstanten erforderlich.

Die Ergebnisse aus Abbildung 2 zeigen eine sehr genaue Rekonstruktion der dominanten Moden mit einer Dynamik von mindestens 10 dB, während die DFT einen durch die Unterabtastung und Unregelmäßigkeit des Arrays verursachten Rauschteppich aufweist, der eine Identifizierung der drei größten Moden erschwert. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass eine erfolgreiche und genaue Analyse dominanter Signalanteile trotz überlagertem Rauschen und ohne Aliasing mithilfe von Compressed Sensing möglich ist.

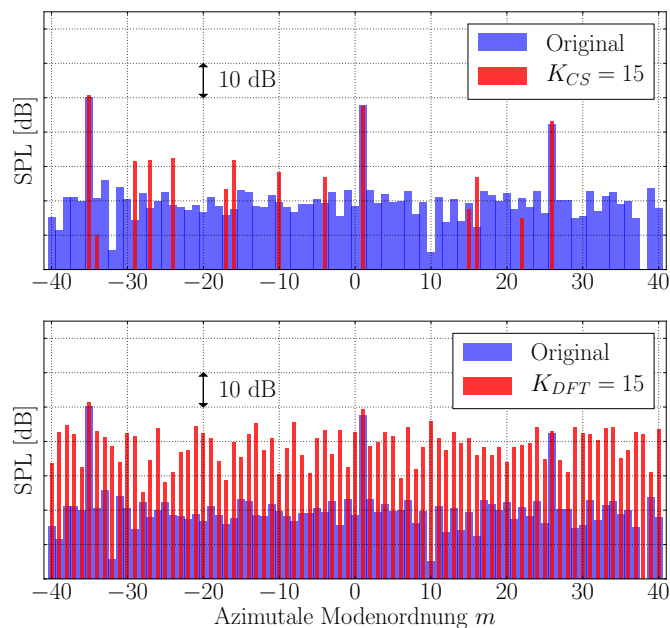


Abbildung 2: Azimutalmodenanalyse eines synthetischen Signals mit drei dominanten Moden mittels CS und DFT

Gemessene Signale

Am akustischen Fan-Teststand bei AneCom AeroTest GmbH wurden Messungen mithilfe eines Mikrofonarrays stromab einer sich drehenden Rotor-Stator-Reihe durchgeführt [12]. Das Gitter besteht aus $K = 180$ äquidistant angeordneten Mikrofonen. Die sich aus dem Abtasttheorem ergebende Bandbreite liegt demnach mit Anwendung der DFT bei $|m| \leq 89$. Es wurde sichergestellt, dass die maximal ausbreitungsfähige Mode sowie die Tyler-Sofrin-Moden in diesem Bereich liegen. Die aus dem vollen Gitter gewonnenen rekonstruierten Modenspektren durch die DFT dienen als Referenzwerte für die Compressed Sensing Ergebnisse. Für die Sensing-Matrix wurden unregelmäßig $K = 45$ Mikrofone derart aus dem äquidistanten Gitter gewählt, dass die Kohärenz minimiert wurde. Dabei wurde Gleichung (8) mit $s = 2$ erwarteten dominanten Moden und $C_2 \approx 0,85$ berücksichtigt.

Abbildung 3 zeigt die Gegenüberstellung der Beträge und Phasen der azimutalen Moden vom CS Algorithmus und vom Referenzsignal. Um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten, wurde bei dieser Darstellung das sichtbare Spektrum auf $|m| \leq 50$ beschnitten. Die beiden Tyler-Sofrin-Moden in $m = 24$ und $m = -18$ werden sehr gut approximiert. Darüber hinaus zeigten weitere numerische Versuche, dass die Mikrofonanzahl, bei Beibehaltung hinreichend guter Rekonstruktion der beiden dominantesten Moden, bis zu $K = 30$ ($C_2 \approx 0,58$) reduziert werden kann.

Zum Vergleich wurde die DFT auf die gleichen Datensätze angewendet. Hierbei wurde dasselbe Mikrofonarray wie bei der CS-Analyse in Abbildung 3 verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4 dargestellt. Die Modenbeträge weisen erneut das typische

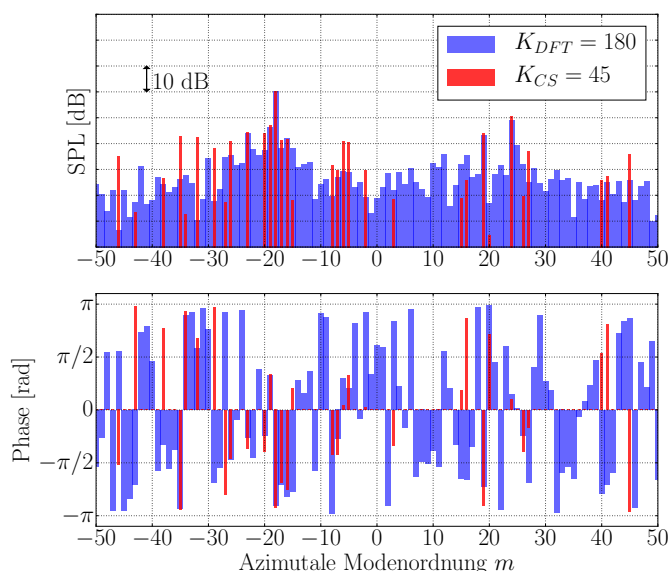


Abbildung 3: Azimutalmodenanalysen gemessener Daten mittels CS bei Verwendung von $K = 45$ Mikrofonen und mittels DFT bei Verwendung von $K = 180$ Mikrofonen

Gitterrauschen auf, wodurch eine maximale Dynamik von 10 dB erreicht werden kann.

Schlussfolgerung

Bei der Azimutalmodenanalyse können durch Anwendung von Compressed Sensing komplexe Amplituden beliebiger dominanter Moden mit stark reduzierter Mikrofonanzahl zuverlässig und mit hoher Genauigkeit approximiert werden. Die Nyquist-Shannon-Abtastrate kann dabei deutlich unterschritten werden. Auch bei überlagertem Rauschen ist eine robuste und präzise Rekonstruktion möglich, wie durch die Analyse synthetischer und gemessener Datensätze gezeigt werden konnte. Im Vergleich zur DFT wird mit CS bei gleicher Sensoranzahl auch eine höhere Dynamik erreicht.

Danksagung

Die experimentellen Messungen wurden innerhalb des vom Land Brandenburg geförderten OPAL Projektes durchgeführt und von Rolls Royce Deutschland Ltd & Co KG unterstützt.

Literatur

- [1] Tyler, J. M. & Sofrin, T. G.: Axial flow compressor noise studies. SAE Transactions 70, 309-332, 1962
- [2] Rademaker, E. R., Sijtsma, P. & Tester, B. J.: Mode detection with an optimised array in a model turbofan engine intake at varying shaft speeds. 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2001
- [3] Kislner, R.: Azimutale Modalanalyse akustischer Signale in zylindrischen Kanälen bei Unterabtastung mit Compressed Sensing. Masterarbeit, Technische Universität Berlin & DLR - Triebwerksakustik. In Bearbeitung

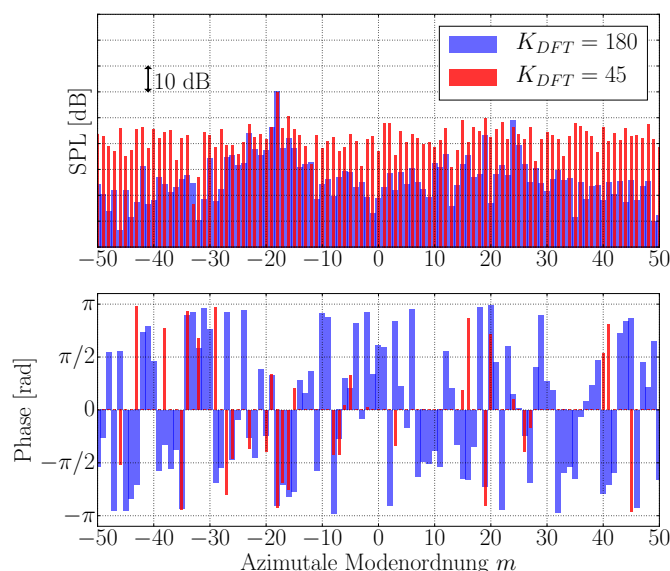


Abbildung 4: Azimutalmodenanalysen gemessener Daten mittels DFT bei Verwendung von $K = 45$ und $K = 180$ Mikrofonen

- [4] Tropp, J. A.: Greed is good: algorithmic results for sparse approximation. IEEE Trans. Inform. Theory 50(10), 2231-2242, 2004
- [5] Kutyniok, G. & Eldar, Y. C.: Compressed Sensing: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2012
- [6] Donoho, D.: Compressed Sensing. IEEE Trans. Inform. Theory 52(4), 1289-1306, 2006
- [7] Candès, E., Romberg, J. & Tao, T.: Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans. Inform. Theory 52(2), 489-509, 2006
- [8] Candès, E., Romberg, J. & Tao, T.: Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. Communications on Pure and Applied Mathematics 59(8), 1207-1223, 2006
- [9] Rudelson, M. & Vershynin, R.: On sparse reconstruction from fourier and gaussian measurements. Commun. Pure Appl. Math. 61(8), 1025-1045, 2008
- [10] Hayashi, K., Nagahara, M. & Tanaka, T.: A user's guide to compressed sensing for communications systems. IEICE Trans. Commun. 96(3), 685-712, 2013
- [11] Huang, X.: Compressive sensing and reconstruction in measurements with an aerospace application. AIAA 51, 1011-1015, 2013
- [12] Tapken, U., Bauers, R., Neuhaus, L., Humphreys, N., Wilson, A., Stöhr, C. & Beutke, M.: A new modular fan rig noise test and radial mode detection capability. In: Proceedings 17th AIAA / CEAS Aeroacoustics Conference, 2011