

# Untersuchung leichter Massivholzkonstruktionen im mittleren und höheren Frequenzbereich

Christoph Winter, Martin Buchschmid, Gerhard Müller

Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, 80333 München, E-Mail: christoph.winter@tum.de

## Einleitung

Für eine Verwendung leichter Massivholzkonstruktionen im Geschosswohnungsbau sind die methodischen Grundlagen für die Planung des erforderlichen Luft- und Trittschallschutzes weiterzuentwickeln. Hierfür ist insbesondere die Prognose der Schallübertragung an Bauteilstößen notwendig.

Im tiefen Frequenzbereich eignet sich die Finite Elemente Methode (FEM) für Vorhersagen. Mit steigender Frequenz nimmt die Anzahl der Moden pro Frequenzband zu, wobei die klassische FEM aufgrund der Sensitivität der Ergebnisse an Grenzen stößt und die Anwendung statistischer Methoden erforderlich wird. Die Statistische Energie Analyse (SEA) liefert für hohe Frequenzen robuste Ergebnisse, erlaubt jedoch in der Regel nur eine eingeschränkte Orts- und Frequenzauflösung.

Bei der Vorhersage im mittleren Frequenzbereich werden für die oben genannten Strukturen im Rahmen einer Energieflussanalyse (EFA) Mittelungsmethoden der SEA [1] in der Nachauswertung der FEM eingesetzt. Die Vorteile des Verfahrens sind robuste Ergebnisse sowie eine größere Flexibilität bei der Definition der Subsysteme [2, 3].

Mit der EFA können die Energieflüsse zwischen den einzelnen Bauteilen, auch für den mittleren Frequenzbereich, in Form von Energieeinflusskoeffizienten (Energy Influence Coefficients - EICs) bestimmt werden. Sofern die Voraussetzungen der SEA erfüllt sind, kann die EFA auf die Power Injection Method (PIM) erweitert werden, um auch die Dämpfungsverlustfaktoren (DLFs) und Kopplungsverlustfaktoren (CLFs) zwischen Bauteilen zu berechnen.

## Verfahren

Bei der Anwendung der EFA wird die Struktur - entsprechend deren Unterteilung in Bauteile - in Subsysteme eingeteilt, wobei im Gegensatz zur SEA die Voraussetzung der schwachen Kopplung nicht gegeben sein muss.

Zunächst wird eine Harmonische Analyse durchgeführt. Die einzelnen Subsysteme werden wahlweise mit einer bekannten Belastung oder im Fall einer statistisch verteilten Last mit einer „Rain on the Roof“ - Anregung beaufschlagt. Letztere gewährleistet eine Beteiligung aller Moden an der Systemantwort. Aus Last und Schnelle an den Lastangriffspunkten  $k$  wird die eingebrachte Leistung, gemittelt nach Zeit und Ort, berechnet:

$$\bar{P}_j = \sum_k \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F_k \cdot \tilde{v}_k\} \quad [\text{W}] \quad (1)$$

Das zeitliche Mittel der kinetischen und potentiellen Energie wird zunächst auf Elementbasis berechnet und lastfallbezogen über jedes Subsystem aufsummiert.

$$\bar{E}_{pot} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{4} u_e^T K_e u_e \quad [\text{J}] \quad (2)$$

$$\bar{E}_{kin} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{4} \dot{u}_e^T M_e \dot{u}_e \quad [\text{J}] \quad (3)$$

Für schwach gekoppelte Strukturen und resonante Antworten kann die Gesamtenergie auch auf Basis gemessener Schnellen ermittelt werden, da hier kinetische und potentielle Energie nahezu übereinstimmen.

Mittels der Gesamtenergie in den Subsystemen sowie der in die einzelnen Subsysteme eingebrachten Leistung kann die Matrix  $\mathbf{A}$  der EICs ermittelt werden (siehe Gleichung (4)). Hierbei stellt der Matrixeintrag  $A_{ij}$  die auf die eingebrachte Leistung normierte Energie im Subsystem  $i$  bei Belastung des Subsystems  $j$  dar.

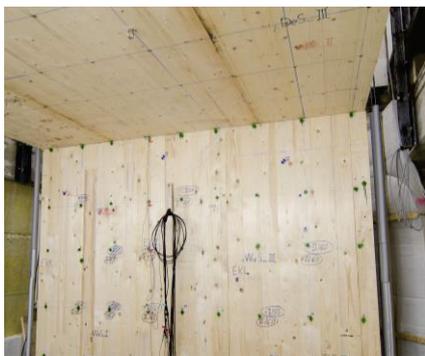
$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{P_1} & \frac{E_{12}}{P_2} & \dots & \frac{E_{1n}}{P_n} \\ \frac{E_{21}}{P_1} & \frac{E_{22}}{P_2} & \dots & \frac{E_{2n}}{P_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{E_{n1}}{P_1} & \frac{E_{n2}}{P_2} & \dots & \frac{E_{nn}}{P_n} \end{bmatrix} \quad [\text{s}] \quad (4)$$

Sind hierbei die Voraussetzungen für eine Anwendung der SEA gegeben, können die Dämpfungs- und Kopplungsverlustfaktoren durch eine Invertierung der EIC-Matrix gemäß Gleichung (5) gewonnen werden.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{A}^{-1} = (\Omega \cdot \mathbf{A})^{-1} \quad [-] \quad (5)$$

## Vorgehen und Systembeschreibung

Um das dynamische Verhalten eines Subsystems korrekt zu beschreiben, wird das numerische Modell einer Brettspertholzdecke überprüft. Hinsichtlich des Energieflusses wird die Untersuchung auf verschiedene Bauteilstoßgeometrien (L- und T-Stoß) erweitert. Die Materialparameter werden im Rahmen einer Parameteridentifikation mittels Bayesscher Optimierung gewonnen, indem die berechneten Eigenfrequenzen den gemessenen (Abbildung 1) angenähert werden [4].



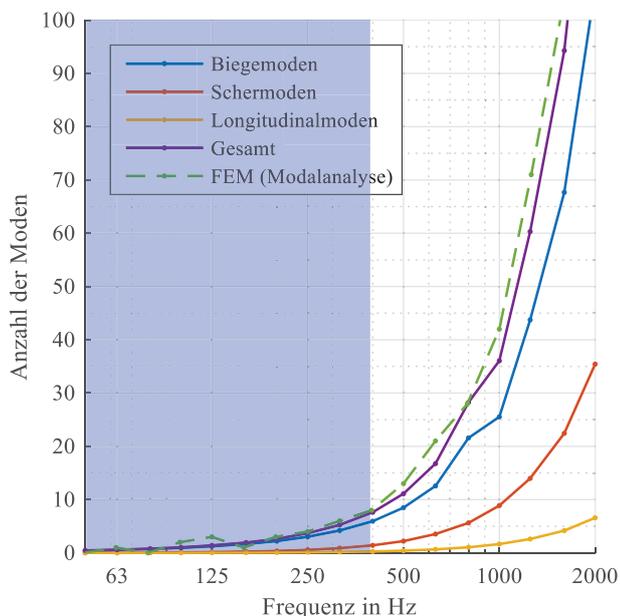
**Abbildung 1:** Messaufbau: Bauteilstoß bestehend aus Brettsperrholzwand und -decke (Subsystem 1 bzw. 2).

## Kriterien der Statistischen Energieanalyse

Eine Voraussetzung der Statistischen Energieanalyse ist eine ausreichende modale Dichte bzw. genügend Moden pro Band. Mit einem auf der Differentialgleichung der orthotropen Platte basierenden Wellenzahlansatz kann näherungsweise die modale Dichte der Biegemoden in einer orthotropen Platte mit der Fläche  $A$ , der Dicke  $d$ , der Dichte  $\rho$  sowie den Elastizitätsmoduln  $E_x$  und  $E_y$  bestimmt werden [1] (Gleichung (6)):

$$n(\omega) = \frac{\sqrt{12\rho A}}{\sqrt[4]{E_x E_y} d 4\pi} \quad [\text{s}] \quad (6)$$

Bei der Ermittlung der modalen Dichte in Gleichung (6) wird die Orthotropie des Materials berücksichtigt, indem der Elastizitätsmodul näherungsweise aus dem geometrischen Mittel der beiden Richtungen ermittelt wird [5].



**Abbildung 2:** Anzahl der Moden pro Terzband in einer orthotropen Platte analytisch und mittels eines FE Modells bestimmt.

Die gewählte Bandbreite ist maßgebend für die Anzahl der Moden pro Band. In Abbildung 1 ist die Anzahl Moden pro

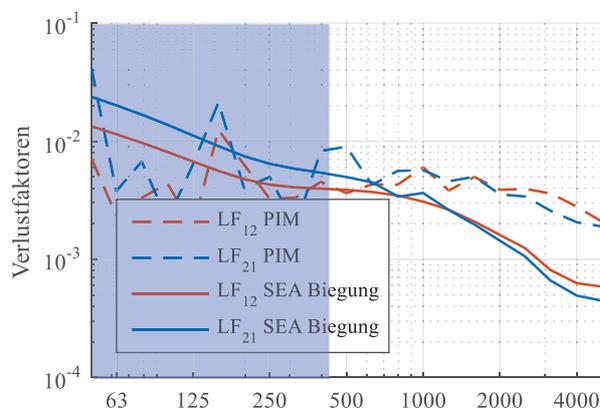
Terzband für die drei verschiedenen Wellenarten dargestellt, wobei die Scher- und Longitudinalwellen im Gegensatz zu den Biegemoden erst im höheren Frequenzbereich einen entscheidenden Beitrag leisten.

In dem blau hinterlegten Bereich hat die untersuchte Platte weniger als sechs Moden pro Band. Dies entspricht je nach Literaturquelle einer Verletzung der SEA-Kriterien, wodurch die PIM nicht auswertbar ist [6]. Die analytische Näherung der Zahl der Moden stimmt näherungsweise mit der auf Finiten Elementen (FE) basierenden Modalanalyse überein.

Um die Kopplungsverlustfaktoren terzbandweise zu ermitteln, werden die Energien und Leistungen innerhalb der Terzbänder nach Gleichung (7) gemittelt und in die Gleichungen (4) und (5) eingesetzt.

$$\bar{S}_{Terz} = \sum_{f=f_u}^{f_o} \bar{S}(f) \quad [\text{Hz}] \quad (7)$$

Am L-Stoß werden die CLFs für den Fall einer klassischen SEA-Linienkopplung mit denen der PIM bei starrem Verbund verglichen. Abbildung 3 zeigt eine mit zunehmender Frequenz größer werdende Abweichung. Während die CLFs der PIM sämtliche Wellentypen berücksichtigen, stellen die der SEA nur den Austausch zwischen den der Biegewellensubsystemen dar, wobei aus Abbildung 2 die für hohe Frequenzen zunehmende Bedeutung der Scher- und Longitudinalwellen hervorgeht.

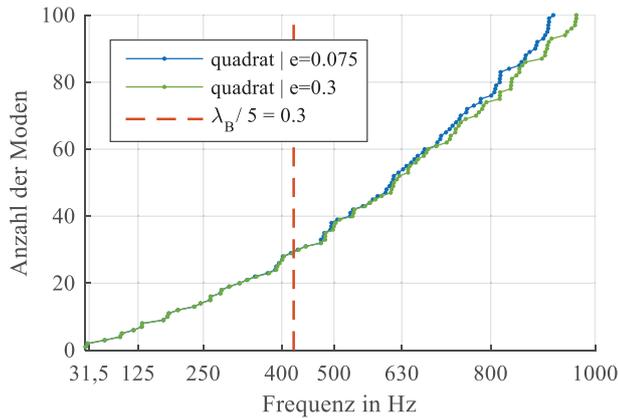


**Abbildung 3:** CLFs am L-Stoß aus SEA (nur Biegung) und PIM zwischen Wand (Subsystem 1) und Decke (2).

## Modellierungsaspekte der FEM

### Elementlänge und Ansatzfunktion

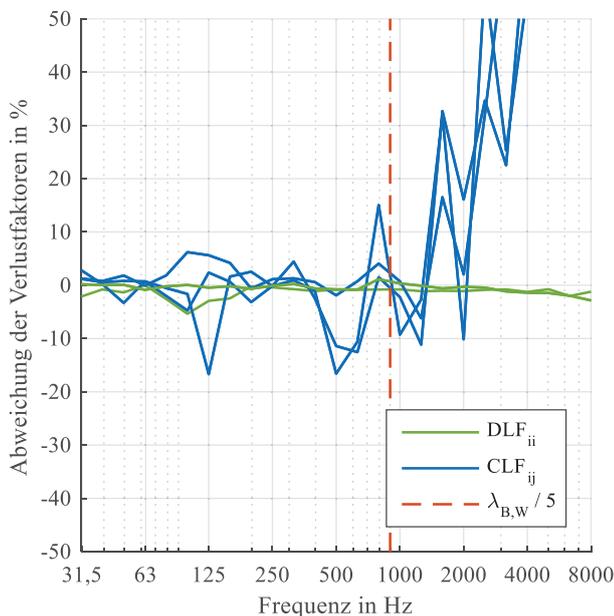
Um die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse der EFA und PIM unabhängig von der gewählten Ansatzfunktion und Elementlänge zu gewährleisten, werden letztere variiert und das entsprechende dynamische Verhalten abgeglichen. Zunächst werden Modalanalysen an einer orthotropen Platte für verschiedene Elementlängen durchgeführt. Anhand der Anzahl der Eigenfrequenzen, aufgetragen über die Frequenz, wird das dynamische Verhalten für die unterschiedlichen Netzfeinheiten verglichen.



**Abbildung 4:** Anzahl der Eigenfrequenzen einer orthotropen Platte aufgetragen über die Frequenz für unterschiedliche Elementlängen.

Gemäß Abbildung 4 führen quadratische Ansatzfunktionen zu einer sehr guten Übereinstimmung, sofern fünf oder mehr Elemente zur Abbildung einer Biegewelle zur Verfügung stehen. Die Biegewellenlänge wird in Gleichung (8) näherungsweise für eine orthotrope Platte ermittelt.

$$\lambda_B(f) = 4 \sqrt{\frac{E_x E_y}{12 \rho}} \sqrt{\frac{d 2 \pi}{f}} \quad [\text{m}] \quad (8)$$



**Abbildung 5:** Abweichung der Verlustfaktoren für unterschiedliche Netze.

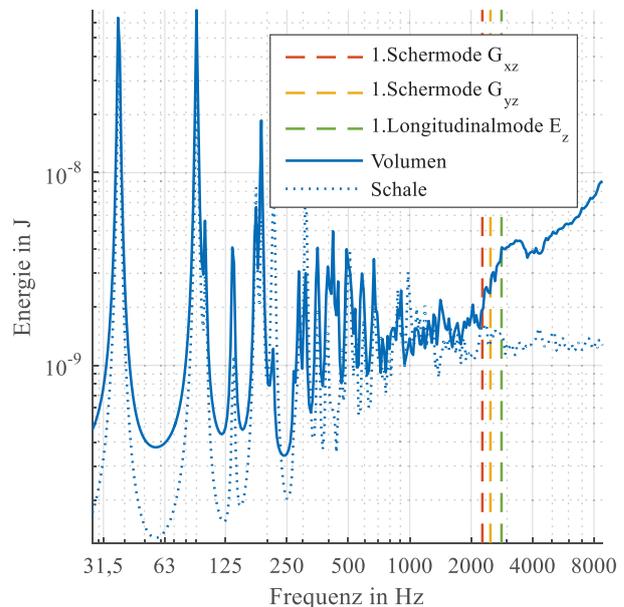
Abbildung 5 zeigt die Abweichung der Verlustfaktoren zwischen einem groben und einem feinen Netz infolge der EFA an einem T-Stoß. Im Frequenzbereich unterhalb der rot gestrichelten Linie stehen mehr als fünf Elemente pro Biegewellenlänge (Gleichung (8)) zur Verfügung. Dort ergibt sich eine Abweichung der Kopplungsverlustfaktoren von maximal 20 %. Im darüber liegenden Frequenzbereich steigt die Abweichung stark an.

### Schalen- vs. Volumenelemente

Während Schalenelemente in Abhängigkeit des gewählten Modells und Frequenzbereichs zu deutlich kürzeren Rechenzeiten bei der EFA führen, können keine Effekte in Dickenrichtung berücksichtigt werden. Sobald Moden in Dickenrichtung einer Platte auftreten, müssen Volumenelemente herangezogen werden, um das dynamische Verhalten der Platten physikalisch korrekt zu abbilden. Mit folgenden Ausdrücken können die ersten resonanten Scher- und Longitudinalmoden in Dickenrichtung ermittelt werden, wobei  $c_{S,z}$  und  $c_{L,z}$  für die Scher- bzw. Longitudinalwellengeschwindigkeit senkrecht zu einer Platte der Dicke  $d$  stehen.

$$f_{1.SM,z} = \frac{c_{S,z}}{d} \frac{1}{2} \quad [\text{Hz}] \quad (9)$$

$$f_{1.LM,z} = \frac{c_{L,z}}{d} \frac{1}{2} \quad [\text{Hz}] \quad (10)$$



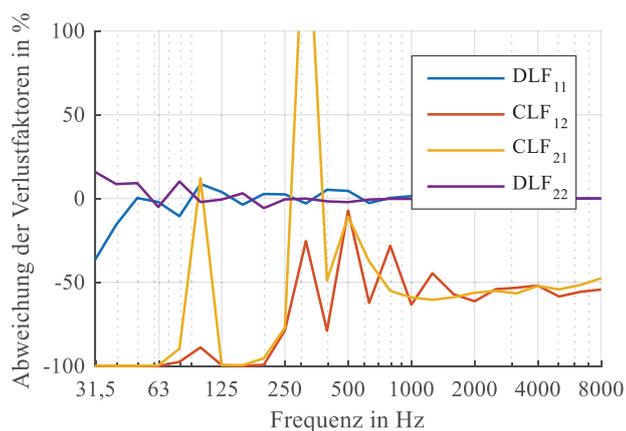
**Abbildung 6:** Energie in einer Platte modelliert mit Schalen- bzw. Volumenelementen infolge harmonischer Anregung.

Abbildung 6 zeigt die Energie in einer Platte infolge harmonischer Anregung für Schalen- und Volumenelemente. Man erkennt, dass die Moden in Dickenrichtung bereits unterhalb ihrer Eigenfrequenz einen nicht-resonanten Beitrag leisten.

### Diskrete Federelemente

Um realistische Kopplungsbedingungen abzubilden, werden diskrete Federelemente an der Verbindungsstelle zweier Bauteile angebracht. Abbildung 7 zeigt über einen weiten Frequenzbereich eine Reduzierung der Kopplungsverlustfaktoren um 60 % infolge eines reibungsfreien Gleitlagers zwischen Wand und Decke am LStoß, d. h. an

der Verbindungsstelle sind nur die Verschiebungen senkrecht zur Decke gekoppelt. Als Referenz dient der starre Verbund.



**Abbildung 7:** Prozentuale Abweichung der Verlustfaktoren aufgrund eines Gleitlagers zwischen Wand (Subsystem 1) und Decke (2) im Gegensatz zum starren Verbund.

### Hysteretische Dämpfung

Für das Finite-Elemente-Modell, auf das die EFA aufbaut, wird eine hysteretische Dämpfung verwendet. Diese wird durch einen frequenzunabhängigen Verlustfaktor  $\eta$  beschrieben, wobei die dissipierte Energie proportional zur Amplitude der Verschiebung ist. Dies bildet das Dämpfungsverhalten von Materialien wie Holz oder Metall besser ab als zum Beispiel eine viskose Dämpfung [7].

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + i(\eta\mathbf{K} + \sum_m \eta_m \mathbf{K}_m) \quad [\text{N/m}] \quad (11)$$

Mittels der komplexen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^*$  (Gleichung (11)) wird die hysteretische Dämpfung in der harmonischen Analyse abgebildet. Hierbei kann materialabhängiges Dämpfungsverhalten  $\eta_m$  berücksichtigt werden.

Aufgrund der Steifigkeitsproportionalität der Dämpfung kann diese aus dem Abgleich von eingebrachter Leistung und potentieller Energie rückgerechnet werden. Hierbei wird in Gleichung (4) für die Gesamtenergie zweimal die mittlere potentielle Energie eingesetzt.

Daraus folgt, dass der steifigkeitsproportionale Verlustfaktor, der in der FE Berechnung definiert wird, nicht mit den Verlustfaktoren übereinstimmt, die aus der EFA ermittelt werden. Letztere stellen das Verhältnis von dissipierter Energie zur gesamten Energie dar. Dies muss bei der Verwendung von Messdaten berücksichtigt werden.

### Fazit

Die EFA ist für den mittleren und höheren Frequenzbereich geeignet. Sie stellt eine hybride Methode dar, die auf einer FE Simulation basiert und Mittelungstechniken der SEA in der Auswertung verwendet. Daher gilt es Kriterien und Anforderungen beider Methoden zu berücksichtigen. Auf der Seite der SEA zählen dazu eine ausreichende Zahl an Moden pro Band durch Mittelung beispielsweise über Terzbänder. In Abhängigkeit von Typ und Länge der Finiten Elemente können Schwankungen auftreten. Eine sehr

effiziente Durchführung der EFA ist mit Schalenelementen möglich, wobei der dafür gültige Frequenzbereich begrenzt ist.

Mittels diskreter Federelemente kann die Kopplungssteifigkeit gezielt variiert werden. Ziel ist es, Kopplungsverlustfaktoren für realitätsnahe Verbindungsteifigkeiten – wahlweise mit Elastomerzwichenschichten – zu ermitteln und die zugehörigen Stoßstellendämm-Maße zu berechnen.

### Danksagung

Die Autoren danken S. Mecking et al. (Hochschule Rosenheim) für die zur Verfügung gestellten Messdaten [8] sowie A. Paolini et al. (Lehrstuhl für Computation in Engineering, Technische Universität München) für die Identifikation der Materialparameter [4] im Rahmen des AiF-DFG-Clusterprojekts „Vibroakustik im Planungsprozess für Holzbauten“.

Das IGF-Vorhaben 18726N der Forschungsvereinigung Internationaler Verein für Technische Holzfragen e.V. – iVTH, Bienroder Weg 54 E, 38108 Braunschweig wurde über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der industriellen Gemeinschaftsforschung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert.

### Literatur

- [1] Lyon, R. H.; DeJong, R. G.: Theory and application of statistical energy analysis, 2. ed. Boston u.a 1995.
- [2] Winter, C.; Buchschmid, M.; Mecking, S.; Weineisen, C.; Müller, G.; Schanda, U.: Modelling the Sound Transmission across Junctions of Building Components by Energy Influence Coefficients. Eurodyn 2014: Eurodyn. IX International Conference on Structural Dynamics 2014.
- [3] Mace, B. R.; Shorter, P. J.: Energy Flow Models from Finite Element Analysis. In: Journal of Sound and Vibration 233 (2000) 3, S. 369–89.
- [4] Paolini, A.; Frischmann, F.; Kollmannsberger, S.; Rank, E.; Mecking, S.; Winter, C.; Buchschmid, M.; Müller, G.: Parameteridentifikation von Brettsperrholz-Elementen mittels Bayesscher Optimierung: 42. Jahrestagung für Akustik 2016.
- [5] Heckl, M.: Untersuchungen an orthotropen Platten. In: Acta Acustica united with Acustica 10 (1960) 2, S. 109–115(7).
- [6] Wöhle, W.; Marx, B.: Körperschallübertragung in Gebäuden – Vergleich von Meßwerten mit Rechenergebnissen der Statistischen Energieanalyse. In: Acta Acustica united with Acustica 72 (1990) 4, S. 258–268(11).
- [7] Petersen, C.: Dynamik der Baukonstruktionen. Wiesbaden 2000.
- [8] Mecking, S.; Winter, C.; Schanda, U.: Endbericht - Phase 1: Vibroakustik im Planungsprozess für Holzbauten. Teilprojekt 3: Parameterentwicklung und Stoßstellenmodellierung 2015.