

## Modellierung der akustischen Kavitation mithilfe des Euler-Lagrange Ansatzes

Sergey Lesnik<sup>1</sup>, Gunther Brenner<sup>1</sup>, Khadija Ayaz-Bustami<sup>2</sup>, Robert Mettin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Technische Mechanik, TU Clausthal, Adolph-Römer Str. 2a,*

*38678 Clausthal-Zellerfeld, Deutschland, Email: sergey.lesnik@tu-clausthal.de*

<sup>2</sup> *Drittes Physikalisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen, Deutschland*

### Einleitung

Durch Ultraschall erzeugte Kavitation ermöglicht es in der Verfahrenstechnik, eine Vielzahl von chemischen Reaktionen zu beschleunigen. Für die Bewertung der Wirksamkeit des Ultraschalls wird zunächst die Schall-druckverteilung und die Blasenpopulation benötigt. Es fehlen allerdings Berechnungsmöglichkeiten, mit denen diese Größen zuverlässig vorhergesagt werden können. Ein Löser, der die Ultraschall-Kavitation vorhersagen kann, wird in der Entwicklungsumgebung OpenFOAM® erstellt, welche auf der Finite Volumen Methode basiert. In der akustischen Kavitation auftretende Phänomene weisen Unterschiede von mehreren Größenordnungen in zeitlichen und räumlichen Skalen auf. Aus diesem Grund wird ein Modellierungs-Ansatz verfolgt, welcher die Physik ausreichend genau abbildet und Berechnungen mit relativ niedrigen Rechenkapazitäten erlaubt. Das genaue Vorgehen wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Anschließend werden die relevanten theoretischen Grundlagen präsentiert: zum einen die numerische Berechnung des Schallfeldes, und zum anderen die Blasendynamik und damit verknüpfte Auswirkungen auf das Schallfeld. Abschließend folgen die Ergebnisse und eine Zusammenfassung.

### Modellierung

In der vorliegenden Arbeit wurde weitestgehend das Modell von Jamshidi und Brenner[1, 2] benutzt. Das Modell vereint zwei Ansätze. Der erste, Euler-Euler Ansatz, betrachtet die Feldgrößen des Schallfeldes und der Strömung. Der zweite, Euler-Lagrange Ansatz, ist für die Verfolgung der einzelnen Kavitationsblasen zuständig, wobei für jede Blase ein Gleichungssystem (GS) zur Beschreibung der radialen Dynamik gelöst wird. Für die Berechnung des GS und der auf die Blasen wirkenden Kräfte werden die benötigten Feldgrößen in der Position der Blase interpoliert. Die Blasen wiederum bewirken eine Dämpfung des Schallfeldes. Die erforderlichen Dämpfungsfaktoren werden von jeder einzelnen Blase auf das Feld zurückgeführt. Somit wird eine Zwei-Wege-Kopplung erreicht, die beide Ansätze vereint.

### Theorie

#### Blockmatrix-Löser

Das Schallfeld wird im Frequenzbereich durch die Helmholtz-Gleichung (1) beschrieben:

$$\nabla^2 p + k_m^2 p = 0, \quad (1)$$

wobei  $p$  - Schalldruckamplitude und  $k_m$  - komplexe Wellenzahl sind. Um die Gleichung in der gegebenen Simulationsumgebung zu lösen, muss diese in realen und imaginären Teil zerlegt werden. Dies erfolgt zunächst für die Variablen:

$$\begin{aligned} p &= \Re(p) + i\Im(p) = P_r + iP_i, \\ k_m^2 &= \Re(k_m^2) + i\Im(k_m^2) = K_r + iK_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Durch das Einsetzen dieser in die Gleichung (1) erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla^2 P_r + K_r P_r - K_i P_i &= 0, \\ \nabla^2 P_i + K_r P_i + K_i P_r &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei Index  $i$  für Imaginär- und Index  $r$  für Realteil steht. Die beiden Gleichungen sind stark gekoppelt und ein segregierter Löser scheitert daran, diese mit ausreichender Konvergenz zu lösen. Aus diesem Grund wird ein Löser eingesetzt, welcher die Gleichungen implizit koppelt. Diese werden nach der Diskretisierung in einem einzigen linearen Gleichungssystem (LGS) zusammengefasst. Man betrachte ein LGS der Form  $Ax = b$ . Wie der Gleichung (4) zu entnehmen ist, werden alle Einträge der Matrix  $A$  durch Matrizen und die Einträge in  $b$  und  $x$  durch Vektoren entsprechend der Gleichung (3) ersetzt.

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{cc} \nabla^2 + K_r & -K_i \\ K_i & \nabla^2 + K_r \end{array} \right)_{d_0} & \left( \begin{array}{cc} \nabla^2 + K_r & -K_i \\ K_i & \nabla^2 + K_r \end{array} \right)_{u_0} & \cdots \\ \left( \begin{array}{cc} \nabla^2 + K_r & -K_i \\ K_i & \nabla^2 + K_r \end{array} \right)_{l_0} & \left( \begin{array}{cc} \nabla^2 + K_r & -K_i \\ K_i & \nabla^2 + K_r \end{array} \right)_{d_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} P_r \\ P_i \end{array} \right)_0 \\ \left( \begin{array}{c} P_r \\ P_i \end{array} \right)_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right)_0 \\ \left( \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right)_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

Die Iteration erfolgt dann für das gekoppelte LGS.

## Dämpfung des Schallfeldes

Die Blasendynamik wird durch die Keller-Mixsis-Gleichung [3] beschrieben:

$$R\ddot{R}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\left(1 + \frac{\dot{R}}{c} + \frac{R}{c}\frac{d}{dt}\right)(p_g - p(t)) - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R}\right] \quad (5)$$

Die Variablen sind:

- $R$  - Blasenradius
- $\dot{R}, \ddot{R}$  - 1. und 2. Ableitung nach der Zeit
- $c$  - Schallgeschwindigkeit des Fluids
- $\rho$  - Dichte des Fluids
- $p_g$  - Gasdruck innerhalb der Blase
- $p(t)$  - Schalldruck
- $\sigma$  - Oberflächenspannung der Blase
- $\mu$  - Viskosität des Fluids

Dem Ansatz von Louisnard [4] folgend können Dämpfungsfaktoren aus der Gleichung (5) hergeleitet werden [1]:

$$\Pi_{th} = \frac{1}{T} \int_0^T - \left( p_g \left( 1 + \frac{\dot{R}}{c} \right) + \frac{R}{c} \frac{dp_g}{dt} \right) \frac{\partial V}{\partial t} dt, \quad (6)$$

$$\Pi_v = \frac{1}{T} \int_0^T 16\pi\mu \left( R\dot{R}^2 + \frac{R^2\dot{R}\ddot{R}}{c} \right) dt, \quad (7)$$

$$\Pi_r = \frac{4\pi}{Tc} \int_0^T R^2\dot{R} \left( \dot{R}p + \dot{p}R - \frac{1}{2}\rho\dot{R}^3 - \rho R\dot{R}\ddot{R} \right) dt. \quad (8)$$

Durch die Anwendung des Modells von Caffisch [5] werden die Dämpfungsfaktoren, die für einzelnen Blasen berechnet werden, mit dem Schallfeld gekoppelt. Dies erfolgt über die Wellenzahl, welche in folgender Form in das Gleichungssystem (3) eingesetzt wird:

$$\Re(k_m^2) = K_r = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{4\pi c^2 N R_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad (9)$$

$$\Im(k_m^2) = K_i = \frac{\Pi_{th} + \Pi_v + \Pi_r}{|p|^2} \quad (10)$$

## Ergebnisse

Aus der Entwicklung der Dämpfungsfaktoren mit der Zeit (Abbildung 1) wird ersichtlich, dass jeder Faktor eine Asymptote anstrebt. Schließlich kann dies durch die Betrachtung der Gleichungen (6-8) nachvollzogen werden. Die relevanten Größen werden zunächst integriert und anschließend durch das Integrationsintervall geteilt, um eine Mittelung zu erhalten. Die steilen Anstiege in den Kurven kennzeichnen die Blasenkollapse. Als Folgerung für das Modell wird angenommen, dass die Dämpfungsfaktoren  $\Pi_i$  schon nach 10 Oszillationen

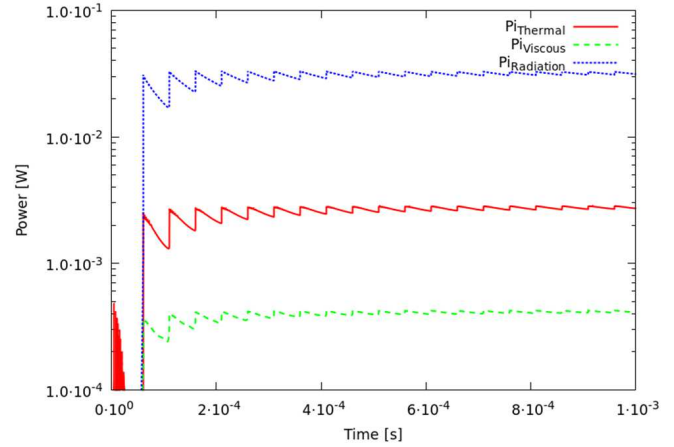


Abbildung 1: Entwicklung der Dämpfungsfaktoren mit der Zeit.

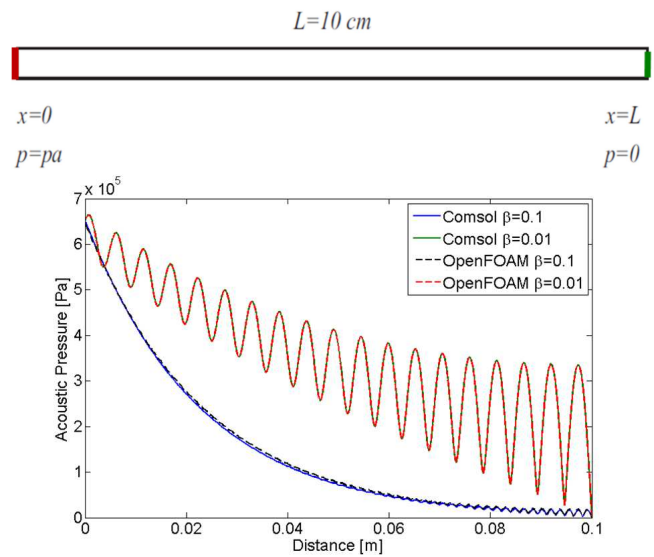


Abbildung 2: 1D Simulation. Oben: das Rechengebiet mit zwei Dirichlet-Randbedingungen (rot - Schallquelle und grün - schallweiche Wand). Unten: Vergleich der Ergebnisse zwischen OpenFOAM und COMSOL für unterschiedliche Blasendichten.

den Endwert erreichen. Damit wird das angesprochene zeitliche Skalenproblem relaxiert.

Zur Verifizierung der Implementierung in OpenFOAM wird COMSOL Multiphysics Software verwendet. Die Schalldruckverläufe aus der eindimensionalen Simulation (Abb. 2) zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Programmen. Die Angabe  $\beta$  beschreibt dabei den Blasenvolumenanteil. Hier ist zu beachten, dass in der Berechnung eine homogene Verteilung der Kavitationsblasen angenommen wurde. Der Effekt der Dämpfung ist an den abfallenden Werten des Schalldrucks von der Schallquelle zur schallweichen Wand zu sehen. Die Dämpfung ist für den größeren Blasenvolumenanteil größer.

Die Abbildung 3 zeigt eine Küvette, welche an der Universität Göttingen für Experimente verwendet wird. Die Abmessungen sind in mm angegeben. Im Boden sind zwei Schallwandler integriert, welche mit der Frequenz  $f =$

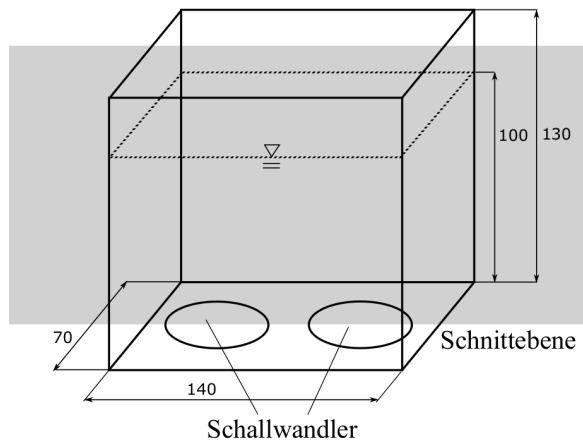


Abbildung 3: Geometrie für die 3D Simulation.

25kHz eine Schalldruckamplitude von etwa  $p = 200\text{kPa}$  bewirken. In der Abbildung 4 ist ein Vergleich zwischen den Schallfeldern in der Schnittebene (Abb. 3) aus dem Experiment und der Berechnung mit OpenFOAM zu sehen. Wie in der 1D-Simulation wird hier eine homogene Blasenverteilung, nun mit einem Blasenvolumenanteil von  $\beta = 0,0005$ , angenommen.

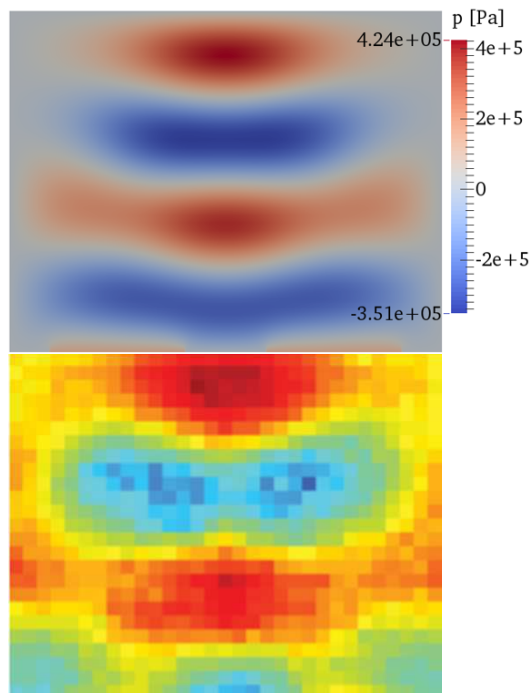


Abbildung 4: Schallfeld aus der Berechnung (oben) und aus dem Experiment [6] (unten).

Jeder Pixel der unteren Abbildung stellt eine Messung mit einem Hydrophon dar. Die dargestellte Legende bezieht sich dabei auf die Ergebnisse aus der Berechnung. Die Schallfeld-Verteilungen sind nur qualitativ zu vergleichen. Senkrecht vom Boden ausgehend, liegen bis zur freien Oberfläche in beiden Fällen jeweils zwei Über- und Unterdruckgebiete vor. Die Strukturen sind ähnlich, wo-

bei lokale Unterschiede auffallen. Die Blasen sind im Experiment allerdings nicht homogen verteilt, sondern bilden Doppelschicht-Strukturen, was in zukünftigen Rechnungen berücksichtigt wird.

## Zusammenfassung und Ausblick

Das vorliegende Modell beschreibt die Blasendynamik mithilfe des Euler-Lagrange Ansatzes und benutzt einen implizit gekoppelten Löser, um die Wellengleichung im Frequenzbereich zu lösen. Die Implementierung wurde für einen 1D-Fall mit einer kommerziellen Software überprüft. Die Ergebnisse der Berechnung für eine 3D-Simulation werden mit experimentellen Daten verglichen.

Die weitere Entwicklung des Modells berücksichtigt die Einführung der Gleichungen für die Kräfte auf einzelne Blasen. Die Verteilung dieser wird dann nicht mehr als homogen angenommen. Außerdem wird eine 4-Wege-Kopplung angestrebt, welche eine Blasen-Interaktion untereinander berücksichtigt. Als weiteres Ziel wird ein Modell zur Blasenpopulations-Dynamik entwickelt.

## Danksagung

Das Projekt wird im Rahmen des DFG-Programms mit dem Zeichen BR 1864/12-1 (TU Clausthal) in Kooperation mit der Georg-August-Universität Göttingen (DFG-Zeichen: ME 1645/5-1) durchgeführt. Wir bedanken uns für die finanzielle Förderung seitens der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

## Literatur

- [1] Jamshidi, Rashid; Brenner, Gunther (2013): Dissipation of ultrasonic wave propagation in bubbly liquids considering the effect of compressibility to the first order of acoustical Mach number. In *Ultrasonics* 53 (4), pp. 842–848.
- [2] Jamshidi, Rashid; Brenner, Gunther (2014): An Euler-Lagrange method considering bubble radial dynamics for modeling sonochemical reactors. In *Ultrasonics Sonochemistry* 21 (1), pp. 154–161.
- [3] Keller, Joseph B.; Miksis, Michael J. (1980): Bubble oscillations of large amplitude. In *The Journal of the Acoustical Society of America* 68 (2), p. 628.
- [4] Louisnard, O. (2012): A simple model of ultrasound propagation in a cavitating liquid. Part I: Theory, nonlinear attenuation and traveling wave generation. In *Ultrasonics Sonochemistry* 19 (1), pp. 56–65.
- [5] Caffisch, Russel E.; Miksis, Michael J.; Papanicolaou, George C.; Ting, Lu (1985): Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. In *Journal of Fluid Mechanics* 153, pp. 259–273
- [6] Eisener, Julian (2013): Untersuchungen zu Blasendynamik und akustischem Emissionsspektrum der Ultraschallkavitation, Diplomarbeit, Drittes Physikalisches Institut, Georg-August Universität Göttingen