

# Eine Kombination aus hybridem Störungsansatz und Kirchhoff Integration zur Simulation von strömungsinduziertem Schall

Patrick Silkeit, Thorben Schröder, Otto von Estorff

TU Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de

## Einleitung und Motivation

Die Simulation von strömungsinduziertem Schall hat in der Produktentwicklung eine wichtige Position inne und findet in vielfältigen Industriebereichen, wie zum Beispiel der Luftfahrt- und der Automobilbranche, Anwendung. Obwohl alle physikalischen Aspekte der Schallentstehung und Schallausbreitung in den kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen enthalten sind, ist beim heutigen Stand der Technik ein direktes numerisches Lösen dieser Gleichung für reale Problemstellungen nicht mit rechtfertigbarem Aufwand möglich. Aus diesem Beweggrund sind in den letzten Jahren eine Vielzahl verschiedener Lösungsansätze entstanden, die sich in ihren Eigenschaften und ihrer Zielsetzung zum Teil stark unterscheiden. Im niedrigen Mach-Zahlbereich, wo die Unterschiede der Energien und Längenskalen zwischen Strömung und Akustik sehr groß sind, sind hybride Berechnungsverfahren unabdingbar. Unter hybriden Verfahren wird die Auftrennung der Simulation in zwei Teile verstanden. Zunächst wird die Strömung simuliert und anschließend die Akustik basierend auf den Strömungsergebnissen in einer zweiten Nachlaufrechnung berechnet.

Die am weitesten verbreiteten hybriden Verfahren lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Die erste Kategorie bilden die Störungsverfahren, die ein Gleichungssystem aufstellen, welches die akustische Wellenausbreitung beschreibt und über eine Quelltermformulierung mit den Strömungsergebnissen gekoppelt sind. Das Gleichungssystem wird zeitlich und örtlich diskretisiert und kann mit einem numerischen Verfahren gelöst werden. Die zweite Kategorie sind die sogenannten integralen Methoden (IM). Hierbei wird die akustische Wellengleichung mit Hilfe einer Greenschen Funktion auf eine Integralgleichung reduziert, die je nach Verfahren Oberflächen- und Volumenintegrale beinhaltet. Durch das Lösen der Integralgleichung kann der akustische Druck an einem Punkt außerhalb des Integrationsgebietes bestimmt werden. Somit wird mit dieser Methode der Druck nur zeitlich an einem Punkt aufgelöst. Es kann allerdings auf jegliche Diskretisierung außerhalb des Integrationsgebietes verzichtet werden.

Ziel dieser Arbeit ist es die Verfahren beider Kategorien zu kombinieren und somit die inhärenten Vorteile möglichst optimal zu nutzen. Hierzu wird zunächst jeweils ein Verfahren aus jeder Kategorie eingeführt. Anschließend werden Vergleichsrechnungen an einem zweidimensionalen umströmten Zylinder vorgestellt, die zunächst die Umsetzung verifizieren und anschließend mögliche Einsatzmöglichkeiten aufzeigen.

## Theoretische Grundlagen

Im folgenden Abschnitt werden ein Störungsansatz und eine IM eingeführt. Zusätzlich wird auf Besonderheiten in der Umsetzung der IM eingegangen.

### Störungsansatz

Als Störungsansatz wird die zweite Variante der Acoustic Perturbation Equations (APE)[1] herangezogen. Diese Gleichungen ergeben sich aus einer Auftrennung der Variablen in einen Strömungs- und einen Akustikanteil. Die Auftrennung wird in die linearisierten Eulergleichungen eingesetzt, anschließend gefiltert und ergibt ein Gleichungssystem, welches die akustische Wellenausbreitung beschreibt. Der Quellterm basiert auf der Zeitableitung des inkompressiblen Strömungsdruckes, worüber die APE mit den Strömungsergebnissen schwach gekoppelt sind. Die APE sind daher nur für Strömungen im niedrigen Mach-Zahlbereich anwendbar. Das Gleichungssystem der APE ergibt sich zu

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \mathbf{u}^a) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^a}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^a) + \nabla \left( \frac{p^a}{\bar{\rho}} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p^a}{\partial t} - \bar{c}^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial P'}{\partial t} \quad (3)$$

Hierin kennzeichnen Variablen mit dem Superskript  $\langle \cdot \rangle^a$  akustische Anteile,  $\overline{\langle \cdot \rangle}$  kennzeichnet über die Zeit gemittelte Größen und  $\langle \cdot \rangle'$  kennzeichnet Schwankungsgrößen. Die Schallgeschwindigkeit ist durch  $c$  gegeben und  $P'$  ist der Schwankungsanteil des inkompressiblen Strömungsdruckes.

Das APE Gleichungssystem wird in einem örtlich diskretisiertem Gebiet mit dem numerischen Verfahren der finiten Volumen gelöst.

### Integrale Methode

Als Stellvertreter für die IM wird die Kirchhoffintegralgleichung betrachtet. Diese wird mit Augenmerk auf den im Folgenden betrachteten Fall in der Zeitbereichsformulierung für uniform bewegte Oberflächen nach [2] in der Form, wie sie in [3] gegeben ist, beschrieben. Startpunkt ist die konvektive Wellengleichung

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi = 0. \quad (4)$$

Hierin kann  $\Phi$  jede Größe darstellen, die die Wellengleichung erfüllt (z.B. der akustische Druck) und  $U_\infty$  ist

die Geschwindigkeit der uniformen Strömung. Die Greensche Funktion ergibt sich für eine uniforme Strömungsgeschwindigkeit  $U_\infty$  in  $x$ -Richtung für die gilt  $M_\infty < 1$  zu

$$G = -\frac{\delta(\tau - t + \Delta\tau)}{4\pi r_0}. \quad (5)$$

Hierin ist  $\tau$  die Emissionszeit und  $\Delta\tau$  ist die Zeitspanne zwischen Emission und Detektion am Empfängerpunkt und  $r$  beschreibt den Abstand zwischen Quelle und Empfänger. Der Index  $\langle \cdot \rangle_0$  kennzeichnet die Prandtl-Glauert Transformation, wodurch sich  $r_0$  zu

$$r_0 = \left[ (x - x')^2 + \beta^2 \left[ (y - y')^2 + (z - z')^2 \right] \right]^{1/2} \quad (6)$$

ergibt. Mit  $\langle \cdot \rangle'$  gekennzeichnete Größen sind Quellkoordinaten und Größen ohne sind Empfängerkoordinaten,  $\beta$  ist durch  $\beta = (1 - M_\infty^2)^{1/2}$  gegeben. Der Zeitunterschied zwischen Emission und Detektion folgt somit zu

$$\Delta\tau = \frac{r_0 - M_\infty(x - x')}{c\beta^2}. \quad (7)$$

Abschließend ergibt sich die Integralform nach [2] zu

$$4\pi\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_{S_0} \left[ \frac{\Phi}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial n_0} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} + \frac{1}{c r_0 \beta^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \left( \frac{\partial r_0}{\partial n_0} - M_\infty \frac{\partial x_0}{\partial n_0} \right) \right] dS_0, \quad (8)$$

wobei  $n$  den Normalenvektor der Integrationsfläche  $S_0$  bezeichnet, die alle Quellen und nichtlineare Effekte der Schallausbreitung beinhaltet und  $[\cdot]_\tau$  bedeutet die Auswertung zum Emissionszeitpunkt.

Mit Gleichung 8 ist es nun möglich den akustischen Druck an einem beliebig weit entfernten Empfängerpunkt auf Basis der Daten auf der Integrationsoberfläche  $S_0$  zu bestimmen. Hierzu ist keine örtliche Diskretisierung außerhalb von  $S_0$  notwendig. Ein Bestimmen von Informationen innerhalb der Integrationsfläche ist mit der IM allerdings nicht möglich.

Die IM ist in einer Emissionszeitformulierung umgesetzt. In der herkömmlichen Detektionszeitformulierung ist aufgrund der Auswertung des Integrals zum Emissionszeitpunkt ein großer Speicheraufwand nötig um die Daten vorzuhalten, die zur Berechnung des Zustandes zum Emissionszeitpunkt benötigt sind. In der Emissionszeitformulierung ist dies nicht notwendig, da die Auswertung des Integrals zum Simulationszeitpunkt durchgeführt wird und der akustische Druck für einen Zeitpunkt berechnet wird, der relativ zur Simulationszeit in der Zukunft liegt.

Der im Folgenden betrachtete Fall ist zweidimensional. Da jedoch die dreidimensionale Formulierung der Kirchhoffgleichung verwendet wird, ist es notwendig die Tiefe in Spannweitenrichtung zu modellieren. Dies geschieht über eine fiktive Aneinanderreihung des Berechnungsgebietes, um so die Dreidimensionalität zu erhalten. Umgesetzt wird dies, indem zusätzliche Empfängerpunkte

auf gleicher Höhe entlang der Spannweite platziert und die Ergebnisse der Punkte addiert werden. Voraussetzung hierfür ist, dass die Abstrahlung harmonisch ist und entlang der Spannweite keine Phaseneffekte auftreten, was im betrachteten Fall nur bei sehr kleinen Reynoldszahlen gilt.

### Kombiniertes Verfahren

Ziel ist es, ein numerisches Tool zu entwickeln, welches die Berechnung der Schallentstehung sowie der Schallausbreitung im Nah- und Fernfeld beherrscht. Hierzu werden nun beide zuvor vorgestellten Verfahren miteinander kombiniert, um ein Simulationsverfahren zu kreieren, bei dem sich die Vor- und Nachteile der jeweiligen Verfahren positiv ergänzen. Der Störungsansatz wird genutzt um die Schallentstehung und strömungsinduzierte Ausbreitungsphänomene auf Basis der Ergebnisse einer inkompressiblen Strömungssimulation abzubilden. Mit diesem Verfahren wird die akustische Ausbreitung berechnet, bis sie als linear angesehen werden kann und somit die Anforderung der IM erfüllt. Diese wird anschließend dazu verwendet den akustischen Druck an einem oder mehreren Punkten im Fernfeld zu bestimmen. Das kombinierte Verfahren ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt. Beide Verfahren sind in die Softwareumgebung OpenFOAM® integriert. Durch die Umsetzung der Emissionszeitformulierung ist eine simultane Durchführung beider Verfahren möglich, da beide Simulationsschritte in einem Zeitschritt ablaufen können.

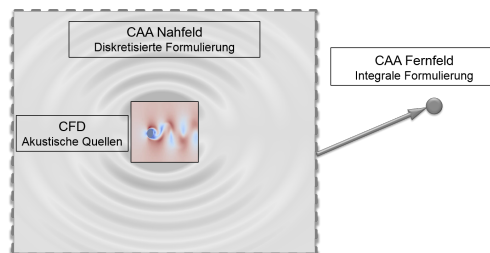


Abbildung 1: Schematische Darstellung des kombinierten Simulationsverfahrens

### Fallbeschreibung

Als repräsentativer Fall wird eine laminare Zylinderumströmung betrachtet, deren Reynolds-Zahl bei  $Re = 200$  liegt. Die Strömung wurde als zweidimensional angenommen und dementsprechend simuliert. Basierend auf den Strömungsergebnissen wird zunächst eine Akustiksimulation mit den APE durchgeführt. Diese wird anhand einer semi-analytischen Lösung verifiziert, die auf dem Auftriebsbeiwert basiert und der eine Dipolabstrahlung zu Grunde liegt [4]. In Abbildung 2 wird ein momentaner Verlauf des akustischen Druckes über den Abstand vom Zylinder senkrecht zu Anströmung dargestellt. Die semi-analytische Lösung bildet eine Hüllkurve für die maximale Amplitude des akustischen Druckes. In der Nähe des Zylinders ist deutlich zu erkennen, dass der akustische Druck oberhalb der Hüllkurve liegt. Dies kann dadurch begründet werden, dass in der Druckformulierung

der APE aerodynamische Anteile enthalten sind. Sind diese Anteile abgeklungen, wie bei größerem Abstand der Fall, stimmen simulierter Druck und semi-analytische Lösung sehr gut überein. Das gezeigte Simulationsergebnis dient im Folgenden als Vergleichsgrundlage für die Untersuchung des kombinierten Verfahrens.

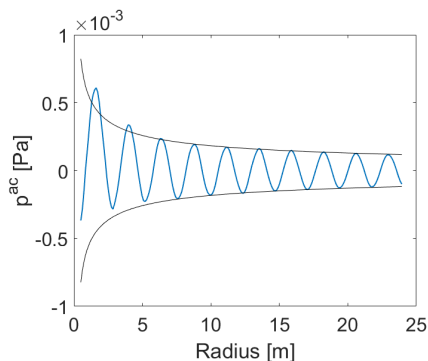


Abbildung 2: Vergleich von momentanem akustischem Druckverlauf über den Abstand mit semi-analytischer Lösung

### Simulationsergebnisse

Zunächst wird die zuvor eingeführte Modellierung der Spannweitenrichtung untersucht. Damit ein Vergleich beider Methoden möglich ist, wird der Empfängerpunkt und die Gebietsgröße der APE-Simulation so gewählt, dass der Empfängerpunkt innerhalb des diskretisierten Gebietes liegt. Hierzu werden verschiedene Tiefen simuliert, um zu prüfen ob die IM mit dem Modell gegen das APE-Ergebnis konvergiert. Betrachtet wird ein Empfängerpunkt bei einem Abstand von  $r = 20$  m. Die Problematik des Modellierungsansatzes wird deutlich, wenn man die Laufzeiten der entfernten Punkte betrachtet. Diese können bei großen Entfernung so lang werden, dass eine sehr lange Simulationszeit notwendig ist um die Einflüsse dieser Punkte mit zu betrachten. Durch die Zeitverzögerung werden so auch Anfangseffekte auf das ganze Signal am Empfängerpunkt übertragen. In Abbildung 3 sind die Effektivwerte des akustischen Druckes am Empfängerpunkt auf Basis von verschieden tief modellierten Spannweiten dargestellt. Zusätzlich ist der Effektivwert des APE-Ergebnisses dargestellt. In Abbildung 3 ist zu

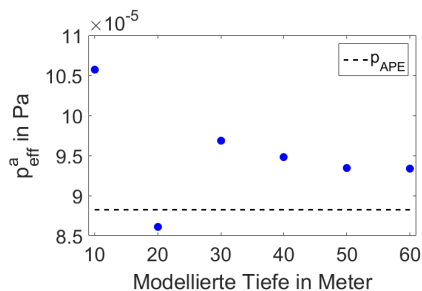


Abbildung 3: Effektivwert des akustischen Drucks über modellierte Tiefe in Spannweitenrichtung

erkennen, dass das Ergebnis der Kirchhoffsimulation bei steigender Spannweitmodellierung konvergiert. Die Ergebnisse mit einer Tiefe von 50 Metern und 60 Metern

zeigen keine Abweichung. Der Effektivwert des konvergierten Kirchhoffergebnisses liegt etwas über dem des APE-Ergebnisses. Für die Simulation mit einer Tiefe von 60 Metern ist die längste Zeitdifferenz  $\Delta\tau$  zwischen Emission und Detektion zu lang um im Zeitbereich einen Einfluss auszuüben.

Allgemein zeigt sich, dass es einen Zeitpunkt gibt an dem das Kirchhoffsignal seine Amplitude fast sprungartig ändert, wenn das größte, in der Simulation auftretende  $\Delta\tau$  innerhalb des betrachteten Zeitbereiches liegt. Der Zeitpunkt der Amplitudenänderung fällt in etwa mit dem ersten Auftreffen des Signals mit dem größten  $\Delta\tau$  zusammen. Bis zu diesem Zeitpunkt zeigen die Simulationen übereinstimmende Ergebnisse. Liegt das maximale  $\Delta\tau$  außerhalb des betrachteten Zeitbereiches, zeigt die Lösung das erwartete Ergebnis. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 4 deutlich, da das Zeitsignal der 100 Meter tiefen Modellierung einen Anstieg zeigt und das Zeitsignal der 180 Meter tiefen Modellierung wie erwartet weiter verläuft. Eine Erklärung für dieses Phänomen konnte bisher noch nicht gefunden werden. Als Grundlage für die im folgenden Untersuchungen wird die Kirchhoffsimulation mit einer Tiefe von 50 Metern herangezogen.

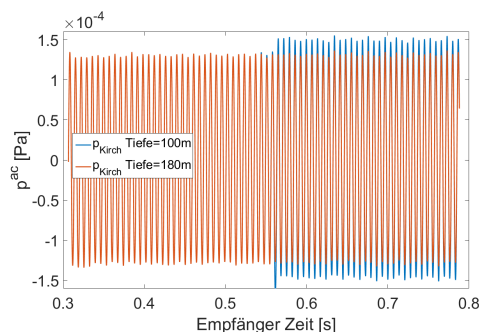
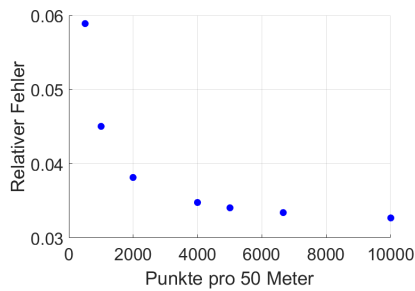


Abbildung 4: Vergleich von zwei Simulationen bei denen das maximale  $\Delta\tau$  einmal innerhalb und einmal außerhalb des betrachteten Zeitbereiches liegt

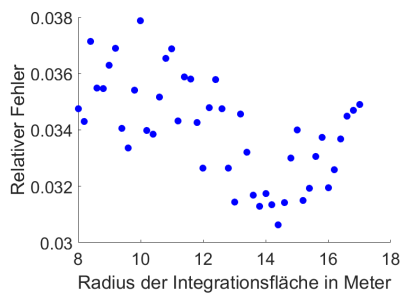
Als zweiter Schritt in der Verifizierung der IM wird die Anzahl der verwendeten zusätzlichen Empfängerpunkte in Spannweitenrichtung untersucht. Hierzu wird die modellierte Spannweite von 50 Metern mit einer ansteigenden Zahl von Punkten aufgelöst. In Abbildung 5 wird der relative Fehler des Effektivwertes des Kirchhoffergebnisses in Bezug auf den Effektivwert des APE-Ergebnisses gezeigt. Es zeigt sich eine Konvergenz mit höher werden der Auflösung zu einem relativen Fehler von unter 3,5 Prozent. Hiermit zeigt sich, dass die Kombination aus Störungsverfahren und integraler Methode in der Lage ist gut übereinstimmende Ergebnisse zu produzieren.

Bei der herkömmlichen direkten Anwendung der Kirchhoffmethode auf Strömungsergebnisse ist die Wahl der Lage der Integrationsfläche von großer Bedeutung. Dies ist in der Annahme begründet, dass alle nicht-linearen Effekte innerhalb der Integrationsfläche abgeschlossen sein müssen. Wann dies jedoch der Fall ist, ist mitunter nicht direkt zu bestimmen. Die Kombination beider Verfahren



**Abbildung 5:** Relativer Fehler des Effektivwertes der Kirchhoffsimulation über die Anzahl der Punkte in die Tiefe

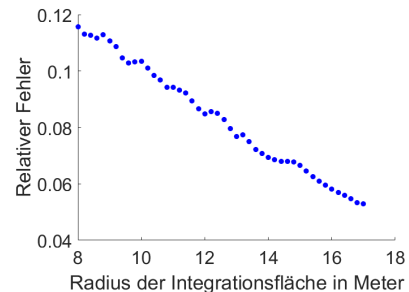
bietet nun die Möglichkeit, die Integrationsfläche wesentlich größer werden zu lassen als dies in der herkömmlichen Anwendung der Fall ist. Basierend auf den zuvor erzielten Ergebnissen wird im Folgenden der Einfluss der Integrationsflächenposition betrachtet. Hierzu werden die Simulationen mit einer Tiefenmodellierung von 50 Metern und insgesamt 4000 Punkten mit variierendem Radius der Integrationsfläche durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6 dargestellt. Hierin ist zu sehen, dass der Einfluss der Integrationsflächenposition in diesem Fall sehr gering ausfällt und keine deutliche Tendenz zu erkennen ist. Dies ist unter anderem damit zu begründen, dass die Vergleichssimulation sehr gute Ergebnisse liefert und somit die analytische Ausbreitung der IM keine Vorteile gegenüber der diskretisierten Methode bietet. Ein Vorteil



**Abbildung 6:** Einfluss des Radius der Integrationsfläche auf den Effektivwert

der vorgestellten Kombination wird deutlich, wenn die vorherige Untersuchung der Integrationsflächenposition erneut durchgeführt wird, das Störungsverfahren allerdings Dissipation aufweist. Numerische Dissipation sowie künstliche Dissipation zur Vermeidung von Gitterschwingungen können in der Anwendung selten vermieden werden, weshalb dies ein realitätsgetreues Beispiel darstellt. Die Dissipation wird in diesem Fall durch eine zu starke Filterung der Simulation erzielt. Wird nun auf Basis dieser Simulation der Einfluss der Integrationsfläche betrachtet, ergibt sich das Ergebnis in Abbildung 7. Es zeigt sich mit zunehmendem Radius ein stetig kleiner werdender Fehler in Bezug auf den Effektivwert des diskretisierten Ergebnisses. Dies bedeutet, dass die Dissipation bei größeren Radii bereits einen größeren Einfluss hatte und somit sich beide Ergebnisse angleichen. Umgekehrt heißt dies, dass je kleiner der Radius ist desto genauer ist das Ergebnis bezogen auf das Simulationsergebnis ohne Dis-

sipation. Somit bietet sich zum Beispiel die Möglichkeit den diskretisierten Bereich sehr genau und dafür aber etwas kleiner zu berechnen und dennoch dissipationsfrei bis zu einem entfernten Punkt zu simulieren. Eine weitere Möglichkeit bietet die Methode zur Betrachtung der enthaltenen Dissipation in einer Simulation, wie in dem betrachteten Fall geschehen.



**Abbildung 7:** Einfluss des Radius der Integrationsfläche auf den Effektivwert basierend auf einer dissipationsbehafteten Simulation

## Zusammenfassung und Ausblick

In dem vorliegenden Beitrag wurde die Kombination eines diskretisierten Störungsansatzes und einer integralen Methode zur Berechnung von strömungsinduziertem Schall vorgestellt. Es konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe einer simplen Modellierung der Spannweite gute Ergebnisse für einen zweidimensionalen Fall erreicht werden können. Des Weiteren wurde der Einfluss des Radius der Integrationsfläche untersucht. Enthält die diskretisierte Simulation kaum Dissipation so ist der Einfluss sehr gering. Ist jedoch Dissipation vorhanden, zeigt sich eine Annäherung der diskretisierten und integralen Ergebnisse. Hieraus lässt sich schließen, dass es sinnvoll sein kann bei Simulationen, bei denen sich Dissipation nicht vermeiden lässt, das diskretisierte Gebiet klein zu halten und mit der integralen Methode Werte in größerer Entfernung zu berechnen. Die Anwendung und Untersuchung der vorgestellten Kombination auf nicht tonale und dreidimensionale Fälle ist für die Zukunft angedacht.

## Literatur

- [1] Ewert, R., Schröder, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics* (2003), 188(2), 365–398.
- [2] Morino, L.: *Mathematical foundations of integral methods. Computational methods in potential aerodynamics*, Springer Verlag (1985), S. 271-291.
- [3] Lyrantzis, A. S.: Review: The Use of Kirchhoff's Method in Computational Aeroacoustics. *Journal of Fluids Engineering* (1994), 116(4), 665-676.
- [4] Schröder, T., Michels, T., von Estorff, O.: Untersuchungen zum Einsatz eines OpenFOAM®-EIF-basierten Strömungsakustik-Lösers. Tagungsband DAGA 2015, Nürnberg