

Adjungierten-basierte Schallfeldsynthese und Beschallung

Mathias Lemke¹, Florian Straube², Jörn Sesterhenn¹, Stefan Weinzierl²

¹ Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, TU Berlin, 10623, Berlin, E-mail: mlemke@nt.tu-berlin.de

² Audio Communication Group, TU Berlin, 10587, Berlin

Einleitung

Das Bestimmen einer geeigneten geometrischen Anordnung sowie einer geeigneten elektronischen Ansteuerung für Line Source Arrays (LSAs), die heutzutage typischerweise für Großbeschallungsaufgaben eingesetzt werden, ist im mathematischen Sinne ein schlecht gestelltes, inverses Problem. In der Praxis werden die benötigten Filterkoeffizienten entweder manuell durch erfahrene Benutzer in einem zeitaufwendigen Prozess oder durch numerische Optimierungsverfahren im Frequenzbereich bestimmt [1–4]. Die verwendeten Algorithmen und ihre Parametrisierung sind kaum öffentlich zugänglich dokumentiert und typischerweise herstellerabhängig.

Der in diesem Beitrag verwendete adjungierten-basierte Ansatz ist eine alternative Herangehensweise. Abhängig von einer Zielfunktion - definiert durch ein Zielschallfeld - erlaubt die Methode die Optimierung von Quellen in Zeit und Raum. Das Verfahren beruht auf den adjungierten Euler-Gleichungen. Sowohl die optimalen Positionen der Schallquellen als auch die optimalen Treiberfunktionen zum Generieren eines gewünschten Schallfeldes können bestimmt werden. Zudem lassen sich mit der adjungierten-basierten Methode Grundströmungen berücksichtigen. Auch für nicht-glatte Quellenanordnungen lassen sich Lösungen finden. An den Grenzen des untersuchten Gebietes können verschiedene Randbedingungen behandelt werden.

In diesem Beitrag werden die Grundlagen der adjungierten-basierten Methode zum Generieren von Schallfeldern sowie ein Beispiel zur Validierung vorgestellt.

Adjungierten-Methode

In der Strömungsmechanik hat sich der Einsatz von adjungierten Verfahren als erfolgreicher Lösungsweg zur Bestimmung von einer Vielzahl von Modellparametern herausgestellt [5]. Eine Übertragung auf die Akustik ist naheliegend, da die üblicherweise verwendeten adjungierten kompressiblen Euler- bzw. Navier-Stokes-Gleichungen [6, 7] die Akustik, sowohl für eine ruhende Umgebung als auch eine Grundströmung, beinhalten. Im Gegensatz zu den im Beschallungsbereich typischen Verfahren im Frequenzbereich, die auf einer Integraldarstellung der homogenen Wellengleichung für diskrete Quellenverteilungen beruhen, handelt es sich hier um eine allgemeinere Darstellung der Wellenausbreitung im Zeitbereich.

Adjungierte allgemein

Es wird, angelehnt an die Beschreibung in [5], ein System betrachtet, welches die zeitliche Schallausbreitung in einem endlichen Volumen beschreibt:

$$Aq = f. \quad (1)$$

Dabei definiert A die beschreibende Systemgleichung, q den Systemzustand und f die Quellen im System. Gesucht ist eine optimale Ansteuerung der Quellen f , um einen gewünschten Systemzustand (q_{ziel}) unter den beschreibenden Gleichungen A zu erzeugen. Das Optimum leitet sich aus einem integralen Maß J (Zielfunktional) mit

$$J = g^T q \quad (2)$$

ab, welches als Produkt von Systemzustand q und einem noch zu bestimmenden Gewicht g definiert ist. Die Sensitivität der Quellen f auf das Zielfunktional lässt sich mit Hilfe der adjungierten Gleichung

$$A^T q^* = g, \quad (3)$$

mit q^* als adjungierter Variable einfach berechnen, da

$$J = g^T q = (A^T q^*)^T u = v^{*T} A q = q^{*T} f \quad (4)$$

gilt. Die adjungierte Variable enthält demnach Informationen, welchen Einfluss die Aktuatoren f auf das Zielfunktional J haben bzw. wie f zu ändern ist. Der Adjungierten-Ansatz kann daher direkt zu einer Lösung für die optimale Anregung bei der Schallfeldgenerierung führen.

Die numerisch diskrete Variante von (3) kann auf unterschiedliche Weise hergeleitet werden. Im *diskreten* Ansatz wird die beschreibende Differentialgleichung zunächst diskretisiert. Der resultierende Operator wird dann transponiert und zur Lösung der adjungierten Gleichung verwendet. Im *kontinuierlichen* Ansatz werden die beschreibenden Gleichungen zunächst linearisiert und dann zur analytischen Herleitung der adjungierten Gleichungen genutzt. Diese werden im Anschluss diskretisiert und zur Lösung verwendet. Wir folgen hier dem kontinuierlichen Ansatz.

Adjungierte zur Schallfeldsynthese

Entsprechend der angestrebten Anwendung, der Schallfeldsynthese im Zeitbereich, wird das Zielfunktional J in Raum und Zeit $d\Omega = dx_i dt$ definiert:

$$J = \frac{1}{2} \iint (q - q_{\text{ziel}})^2 d\Omega. \quad (5)$$

Die Größe q enthält alle zur Systembeschreibung notwendigen Variablen mit $q = [\varrho, u_j, p]$. Dabei bezeichnet ϱ die Dichte, u_j die Geschwindigkeit in Richtung x_j und p den Druck, der hier allein ausgewertet werden soll, also

$$J = \frac{1}{2} \iint (p - p_{\text{ziel}})^2 d\Omega. \quad (6)$$

Im Sinne der Schallfelderzeugung ist ein Minimum von J optimal, wobei p_{ziel} noch geeignet zu definieren ist.

Das Minimum soll unter einer Nebenbedingung erreicht werden, der Gültigkeit der Euler-Gleichungen. Es wird dazu das folgende System eingeführt, analog zu (1):

$$N(q)q = f \quad (7)$$

mit N als beschreibenden Operator für die Euler-Gleichungen:

$$\partial_t(\varrho) + \partial_{x_i}(\varrho u_i) = f_\varrho \quad (8)$$

$$\partial_t(u_j) + u_i \partial_{x_i}(u_j) + \frac{1}{\varrho} \partial_{x_j}(p) = f_{u_j} \quad (9)$$

$$\partial_t\left(\frac{p}{\gamma - 1}\right) + \partial_{x_i}\left(\frac{u_i p \gamma}{\gamma - 1}\right) - u_i \partial_{x_i}(p) = f_p. \quad (10)$$

Die Terme $f = [f_\varrho, f_{u_j}, f_p]$ auf der rechten Seite der Gleichungen repräsentieren Quellen für Masse, Impuls und Energie. Über sie lässt sich die Lösung des Systems beeinflussen. Durch optimale Anpassung von f soll eine Lösung der Euler-Gleichungen bestimmt werden, die möglichst gut mit dem Optimierungsziel p_{ziel} übereinstimmt.

Die Quellen f lassen sich als Schallquellen beziehungsweise Lautsprecher interpretieren. Reine Monopolquellen lassen sich allein durch Energiequellen f_p beschreiben. Direktivitäten lassen sich über die Impulsterme f_{u_j} mit einbeziehen. Eine Optimierung von f entspricht damit einer Optimierung der Ausgangssignale der Lautsprecher.

Um den zuvor beschriebenen Adjungierten-Ansatz zur Optimierung von f anwenden zu können, ist es notwendig das beschreibende System und das Zielfunktional zu linearisieren. Es ergeben sich

$$N_{\text{lin}} \delta q = \delta f \quad (11)$$

und

$$\delta J = \iint \underbrace{(p - p_{\text{ziel}})}_{=g} \delta p d\Omega, \quad (12)$$

mit dem nun definierten Gewicht $g = (p - p_{\text{ziel}})$. Die Kombination von linearisiertem System und Zielfunktional in Lagrange-Art liefert

$$\delta J = g^T \delta q - q^{*\text{T}} \underbrace{(N_{\text{lin}} \delta q - \delta f)}_{=0} \quad (13)$$

$$= q^{*\text{T}} \delta f + \delta q^T (g - N_{\text{lin}}^T q^*). \quad (14)$$

Die adjungierte Gleichung $N^* = N_{\text{lin}}^T$ ergibt sich aus der Forderung

$$g - N_{\text{lin}}^T q^* = 0, \quad (15)$$

mit $q^* = [\varrho^*, u_j^*, p^*]$, analog zu (3). Zur detaillierten Herleitung der adjungierten Euler-Gleichungen wird auf [8,

S. 19] verwiesen. Die Änderung des Zielfunktionals ist gegeben als

$$\delta J = q^{*\text{T}} \delta f. \quad (16)$$

Die Lösung der adjungierten Gleichung lässt sich als Gradient für die Quellterme f interpretieren

$$\nabla_f J = q^*. \quad (17)$$

Iteratives Vorgehen

Er wird verwendet, um eine initiale Quellenverteilung f^0 in Raum und Zeit optimal anzupassen. Zunächst werden die Euler-Gleichungen mit f^0 vorwärts in der Zeit gelöst. Im Anschluss werden die adjungierten Gleichungen rückwärts in der Zeit unter Verwendung der direkten Lösung und der Gewichtungsfunktion g gelöst. Basierend auf der adjungierten Lösung wird der Gradient $\nabla_f J$ bestimmt und zum Aktualisieren der Quellenverteilung f^n verwendet:

$$f^{n+1} = f^n + \alpha \nabla_f J, \quad (18)$$

wobei α eine geeignete Schrittweite und n die Iterationsnummer beschreibt. Der Gradient wird für das gesamte Rechengebiet und die gesamte Simulationszeit bestimmt, aber nur dort ausgewertet wo erwünscht, etwa an vorgegebenen Lautsprecher- beziehungsweise Quellenpositionen. Das Prozedere wird mit dem aktuellen f^n wiederholt, bis Konvergenz im Zielfunktional erreicht ist, siehe Abb. 1 zur Übersicht.

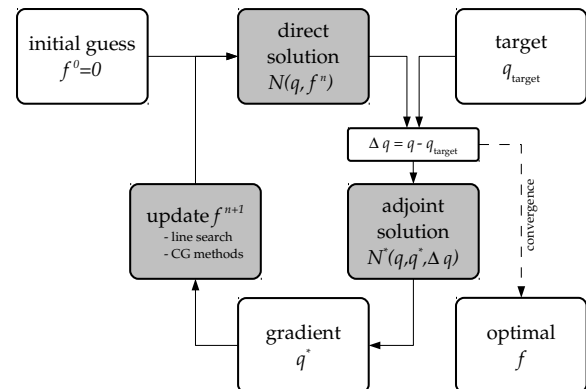


Abbildung 1: Adjungierten-basierte Methode zum Finden einer optimalen Ansteuerung f . Rechenzeitaufwendige Schritte sind grau markiert.

Validierung

Zur Validierung, ob die adjungierten-basierte Methode grundsätzlich zum Finden einer geeigneten Ansteuerung von LSA-Lautsprechern eingesetzt werden kann, werden für ein zwei-dimensionales Setup mit zwei Quellen optimale Anregungssignale gesucht. Die Quellen werden dazu als Lautsprecher interpretiert. Zwischen den Lautsprechern wird ein Abstand von 0.1 m angesetzt und es werden Monopol-Abstrahleigenschaften angenommen. Es wird ein Gebiet von 1 m x 1 m betrachtet, siehe Abb. 2.

Mit Hilfe des Complex-Directivity-Point-Source-(CDPS)-Modells, das üblicherweise für die Schallfeldprädiktion von LSAs verwendet wird [9, Gl. (5)], [1,

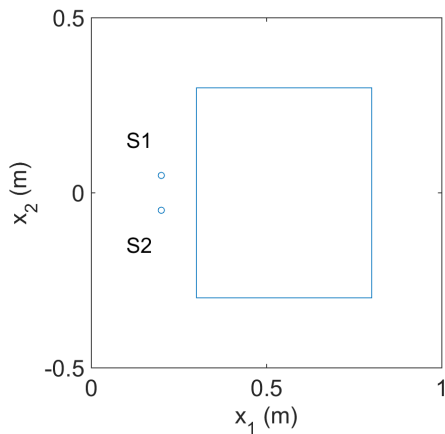


Abbildung 2: Validierungs-Setup: Das Gebiet, in dem das Zielfunktional ausgewertet werden soll, ist durch das Rechteck markiert. Die Lautsprecher S1 und S2 sind durch Punkte gekennzeichnet.

Gl. (3-5)], [10, Abs. 1.1], [11, Gl. (11)], [12, Gl. (2)], wird im Frequenzbereich für eine festgelegte elektronische Ansteuerung der Lautsprecher zunächst das Zielschallfeld p_{ziel} berechnet und in den Zeitraum transformiert. Beide Lautsprecher werden mit einem Sinussignal von 2 kHz mit einem Phasenversatz von zwei Samples angesteuert.

Ziel ist es, mit der adjungierten-basierten Methode die gewählte Ansteuerung allein auf Grundlage des berechneten Schallfelds wiederzufinden. Das Zielschallfeld wird für einen ausgewählten Zeitpunkt in Abb. 3 dargestellt.

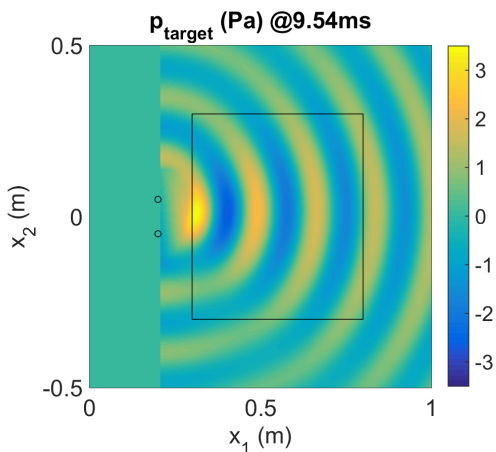


Abbildung 3: Zielschallfeld in der x_1x_2 -Ebene für einen ausgewählten Zeitpunkt.

In der Folge wird die adjungierte Lösung berechnet. Die Berechnung erfolgt rückwärts in der Zeit. Die adjungierte Lösung p^* wird in Abb. 4 für den schon zuvor betrachteten Zeitpunkt dargestellt. Die adjungierte Lösung enthält Informationen über die optimale Ansteuerung und Positionierung der Quellen.

Über die betragsweise Summation der Sensitivitäten lassen sich diejenigen Positionen bestimmen, welche einen möglichst großen Einfluss auf das Zielfunktional

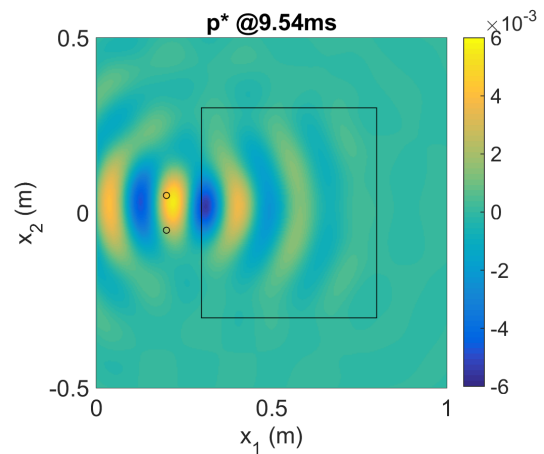


Abbildung 4: Adjungierte Lösung p^* in der x_1x_2 -Ebene für einen ausgewählten Zeitpunkt.

haben:

$$\hat{q} = \sum_{t_n=0}^{t_{n=\text{end}}} |q^*|, \quad (19)$$

siehe [13]. Für den Fall von $f = 0$ erlaubt \hat{q} , komponentenweise ausgewertet, eine optimale Anordnung der Quellen. Das Ergebnis für \hat{p} ist in Abb. 5 dargestellt.

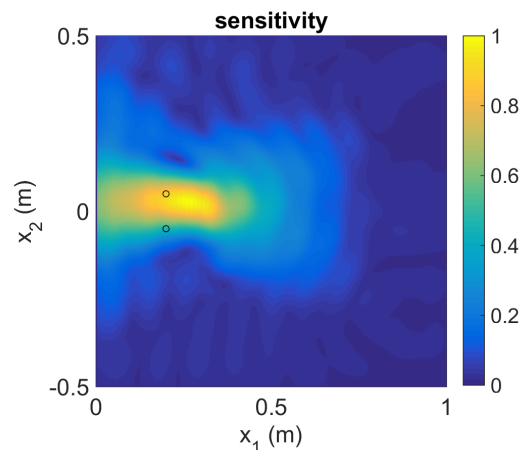


Abbildung 5: Sensitivität \hat{p} . Die Verteilung erlaubt Rückschlüsse auf die optimalen Lautsprecherpositionen.

Da in diesem Validierungsbeispiel die Orte der Quellen bekannt sind, wird die adjungierte Lösung lediglich an den Lautsprecherpositionen ausgewertet. In Abb. 6 ist erkennbar, dass zwei Sinussignale mit einer Frequenz von 2 kHz gefunden werden. Diese weisen das vorher festgelegte Amplitudenverhältnis von 2 zu 1 auf. Das Anregungssignal für Lautsprecher 1 ist, wie eingestellt, um 2 Abtastwerte gegenüber dem von Lautsprecher 2 verzögert.

Bis auf die genaue Amplitude konnte das gesuchte Ansteuerungssignal durch einmalige Berechnung der Adjungierten bestimmt werden. Für komplexere Setups ist ein iteratives Vorgehen notwendig, siehe Abb. 1. Im Fall einer multi-frequenten Anregung und für das Einbeziehen spezifischer Lautsprechereigenschaften wäre anschließend eine Entfaltung im Frequenzbereich notwen-

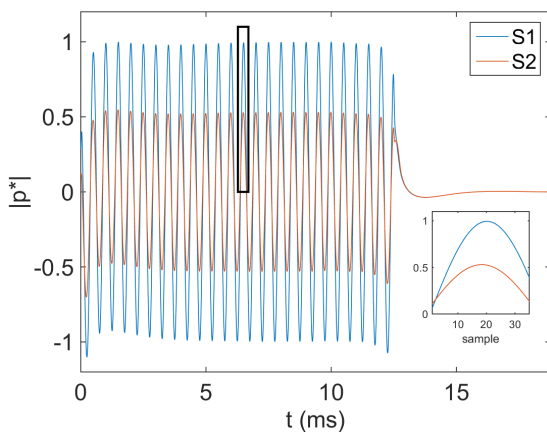


Abbildung 6: Normierte adjungierte Sensitivität $|p^*|$ für f_p an den vorgegebenen Quellenpositionen.

dig, siehe Abb. 7.

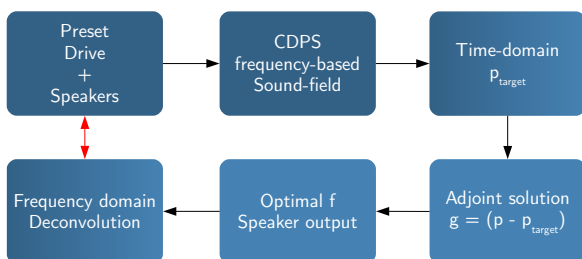


Abbildung 7: Arbeitsablauf zum Validieren beziehungsweise Bestimmen optimaler Treiberfunktionen mit der vorgeschlagenen Methode.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde das Adjungierten-Verfahren als alternative Methode im Zeitbereich zum Finden einer geeigneten Ansteuerung von Line-Array-Lautsprechern präsentiert. Ein grundlegendes zwei-dimensionales Validierungsbeispiel diente dazu, die prinzipielle Eignung des Verfahrens für das Bestimmen der Ansteuerung zu demonstrieren. Es bietet ebenfalls Informationen über eine passende Lautsprecheranordnung. Die Lösung der adjungierten-basierten Methode ist unabhängig von der Anzahl der Lautsprecher und ihrer Anordnung.

Mit dem vorgestellten Ansatz kann prinzipiell eine Grundströmung berücksichtigt werden, um z. B. den Einfluss von Wind auf eine Beschallungssituation zu beschreiben. An den Grenzen des untersuchten Gebietes können verschiedene Randbedingungen berücksichtigt werden.

Literatur

- [1] van Beuningen, G.W.J.; Start, E.W. (2000): "Optimizing directivity properties of DSP controlled loudspeaker arrays." In: *Proc. of the Inst. of Acoustics: Reproduced Sound*, **22**(6):17–37.
- [2] Thompson, A. (2009): "Improved methods for controlling touring loudspeaker arrays." In: *Proc. of the 127th Audio Eng. Soc. Conv., New York*, #7828.
- [3] Thompson, A.; Baird, J.; Webb, B. (2011): "Numerically optimised touring loudspeaker arrays - Practical applications." In: *Proc. of the 131st Audio Eng. Soc. Conv., New York*, #8511.
- [4] Feistel, S.; Sempf, M.; Köhler, K.; Schmalle, H. (2013): "Adapting loudspeaker array radiation to the venue using numerical optimization of FIR filters." In: *Proc. of the 135th Audio Eng. Soc. Conv., New York*, #8937.
- [5] Giles, M.; Pierce, N. (2000): "An introduction to the adjoint approach to design." In: *Flow, Turbulence and Combustion*, **65**:393–415.
- [6] Lemke, M.; Reiss, J.; Sesterhenn, J. (2014): "Adjoint based optimisation of reactive compressible flows." In: *Combustion and Flame*, **161**(10):2552–2564.
- [7] Lemke, M.; Sesterhenn, J. (2016): "Adjoint-based pressure determination from PIV data in compressible flows – validation and assessment based on synthetic data." In: *European Journal of Mechanics - B Fluids*, **58**:29–38.
- [8] Lemke, M. (2015): *Adjoint based data assimilation in compressible flows with application to pressure determination from PIV data*. Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin.
- [9] Meyer, D.G. (1984): "Computer simulation of loudspeaker directivity." In: *J. Audio Eng. Soc.*, **32**(5):294–315.
- [10] Meyer, P.; Schwenke, R. (2003): "Comparison of the directional point source model and BEM model for arrayed loudspeakers." In: *Proc. of the Institute of Acoustics*, **25**(4).
- [11] Feistel, S.; Thompson, A.; Ahnert, W. (2009): "Methods and limitations of line source simulation." In: *J. Audio Eng. Soc.*, **57**(6):379–402.
- [12] Straube, F.; Schultz, F.; Bonillo, D.A.; Weinzierl, S. (2017): "An analytical approach for optimizing the curving of Line Source Arrays." In: *Proc. of the 142nd Audio Eng. Soc. Conv., Berlin*, submitted and accepted.
- [13] Lemke, M.; Westphal, C.; Reiss, J.; Sesterhenn, J. (2015): "Adjoint based data assimilation of sound sources." In: *Fortschritte der Akustik: Tagungsband d. 41. DAGA, Nürnberg*, 635–638.