

Oberflächenwellen einer Kugel nach dem Impulskonzept.

O. Bschorr

Aeroakustik, Stuttgart

Zusammenfassung.

Die Oberflächenwellen eines elastischen Festkörpers besitzen eine durch die Laplace-Gleichung festgelegte Potentialfunktion. So konnte über die kartesische Laplace-Lösung die Oberflächenwelle an einer planen Grenzfläche bestimmt werden. Es ist naheliegend dieses Vorgehen auch auf die Oberfläche einer Kugel zu übertragen. Die Lösungen der sphärischen Laplace-Gleichung sind Legendresche Kugelfunktionen. Auch hier handelt es sich bei verschwindender Intensität im Kugellinnern um eine an die Kugeloberfläche gebundene, deviatorische Führungswelle.

Einleitung. Aufgabenstellung.

Jede lineare elastische Verformung lässt sich auf die 3 irreduziblen, orthogonalen Komponenten zurückführen: Dilatation, Rotation und Deviation. Der deviatorische Spannungstensor, der Deviator, ist spurfrei und symmetrisch und liefert deshalb mit der klassischen Cauchy-Kräftebilanz nur triviale Null-Lösungen. Aus diesem Grund wurde in [1] – hypothetisch – das Kräfte- durch das verwandte Impulskonzept ersetzt und es gelang damit Deviationswellen an planen Oberflächen auszumachen. Aufgabe ist nun, nach derselben Methode auch deviatorische Oberflächenwellen einer Kugel zu bestimmen. Die im Anhang zur Diskussion gestellten, aber noch ungesicherten Korrekturen werden dabei nicht benützt. (*) Da die Kugel in der Geophysik und Seismik häufig als Referenz dient, hat eine solche Analyse nicht nur einen theoretischen Bezug.

Deviatorische Oberflächenwellen einer Kugel.

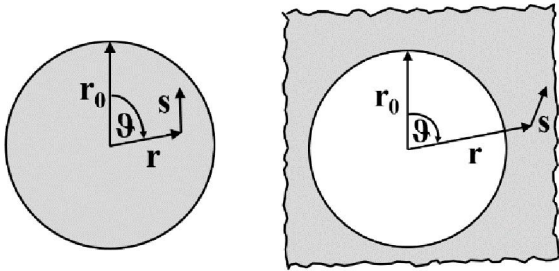


Fig. 1 Deviationswelle an einer Kugel. Bereich $0 < r < r_0$
 Fig. 2 Deviationswelle an einer Kugelkaverne. Für $r_0 < r$.

Vorgegeben ist eine homogene Kugel mit Radius r_0 [m] und mit der durch Dichte ρ [kg/m³] und Schermodul G [Pa] festgelegten Deviationsgeschwindigkeit $c = \sqrt{(G/\rho)}$ [m/s]. Der Einfachheit und Bestimmtheit wegen wird Verlustlosigkeit entsprechend einer reellen Deviationsgeschwindigkeit c angenommen. An einem in den sphärischen Koordinaten $r\mathbf{e}_r, \vartheta\mathbf{e}_\vartheta, \varphi\mathbf{e}_\varphi$ festgelegten Punkt (r, ϑ, φ) bestehe zur Zeit t [s] die elastische, vektorielle Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(r, \vartheta, \varphi, t)$. Eine deviatorische Verformung \mathbf{s} wird nach $\mathbf{s} = \nabla\Phi$ [1] auf das Potential $\Phi = \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ zurückgeführt.

$$\mathbf{s} = \nabla\Phi \quad \Delta\Phi = 0 \quad (1)(2)$$

Allein die Vorgabe $\Delta\Phi \equiv \text{div } \nabla\Phi \equiv \text{div } \mathbf{s} = 0$ zeigt, dass die \mathbf{s} -Verformung divergenzfrei ist. Die Vektoridentität $\text{rot } \nabla\Phi \equiv \mathbf{0}$ bestätigt direkt die Rotationsfreiheit $\text{rot } \mathbf{s} = \mathbf{0}$. Die zweistufige Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ hat die Lösung. [3. S.295].

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{\ell m} \quad \Phi_{\ell m} = R_r T_t U_\varphi V_\vartheta \quad (3)(4)$$

$$R_r \quad R = (r/r_0)^\ell \quad (5)$$

$$T_t = \{T^I = \cos \omega t \quad T^{II} = \sin \omega t \quad T^{III} = \exp i\omega t\} \quad (6)$$

$$U_\varphi = \{U^I = \cos m\varphi \quad U^{II} = \sin m\varphi \quad U^{III} = \exp im\varphi\} \quad (7)$$

$$V_\vartheta = \{V^I = P_{\ell m}(\vartheta) \quad V^{II} = Q_{\ell m}(\vartheta)^* \quad V^{III} = ?^*\} \quad (8)$$

Die Gesamtlösung Φ setzt sich aus den Legendre'schen Eigenmoden $\Phi_{\ell m} = \Phi_{\ell m}(r, \vartheta, \varphi; t)$ zusammen. Spezielle Lösungen sind die zonalen $\Phi_{\ell 0}$ und die sektoriellen Kugelflächen $\Phi_{\ell \ell}$. Es ist zweckmäßig, für $\Phi_{\ell m}$ die den Koordinaten zugeordnete Separationsansätze $R_r = R(r), T_t = T(t), U_\varphi = U(\varphi)$ und $V_\vartheta = V(\vartheta)$ aufzustellen. (5-8). Die Separation R_r der r -Richtung gibt den zur Kugelmitte monotonen Abfall $(r/r_0)^\ell$ und bestätigt so eine Oberflächenwelle. Die Ansätze T_t, U_φ und V_ϑ unterliegen Differentialgleichungen 2. Ordnung und haben 2 orthogonale Lösungen: Bei U_φ mit dem Umfangswinkel φ sind dies $U^I = \cos m\varphi$ und $U^{II} = \sin m\varphi$. Diese Lösungen I. und II. Art beschreiben stehende Wellenfelder. Für Laufwellen dagegen ist es nützlich die beiden, sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Lösungen III. Art einzuführen. Bindeglied zwischen den 3 Lösungsarten ist die Euler-Identität (10).

$$U^I +/- iU^{II} = U^{III} \rightarrow \cos m\varphi +/- i \sin m\varphi = \exp +/- im\varphi \quad (9)(10)$$

Bei V_ϑ mit dem Polarwinkel ϑ sind die Stehwellen durch die Legendre-Polynome der I. und der II. Art bestimmt; $V^I = P_{\ell m}$ und $V^{II} = Q_{\ell m}$. Die zur Beschreibung von Laufwellen notwendige Lösung III. Art V^{III} konnte nicht recherchiert werden.

Stehwellen. Die Lösungen I. Art in die Ausgangsgleichung (4) eingesetzt beschreibt das Potential $\Phi_{\ell m}^I$ und die Auslenkung $\mathbf{s}^I = \nabla\Phi_{\ell m}^I$ des stehenden Wellenfeldes.

$$\Phi_{\ell m}^I = (r/r_0)^\ell T^I V^I U^I = (r/r_0)^\ell \cos \omega t \cos m\varphi P_{\ell m}(\vartheta) \quad (11)$$

$$\mathbf{s}^I = r^{\ell-1} r_0^{-\ell} \cos \omega t \cos m\varphi P_{\ell m} \quad [\#]$$

$$[\#] = \ell\mathbf{e}_r + (\partial P_{\ell m} / \partial \vartheta) / P_{\ell m} \mathbf{e}_\vartheta - (m \text{tg } m\varphi / \sin \vartheta) \mathbf{e}_\varphi \quad (12)^*$$

Konventionell sind darin nur die Terme 1. Art $\{I\} = \{\cos \omega t, \cos m\varphi, P_{\ell m}(\vartheta)\}$ berücksichtigt. Die Terme der 2. Art $\{II\} = \{\sin \omega t, \sin m\varphi, Q_{\ell m}(\vartheta)\}$ stehen dazu in Opposition und sind bei Einsnormierung verbunden durch:

$$\{I\}^2 + \{II\}^2 = 1 \quad (13)$$

Diese Beziehung gilt auch für die Bessel-Funktionen I. und II. Art. [3. Gl. 9.2.17ff]. Die Addition der beiden orthogonalen Stehfelder $\{I\}$ und $+/-\{II\}$ erbringen die Laufwelle $+/-\{III\}$, ebenso gilt die Umkehrung.

Laufwellen. Am einfachsten ist die Ausbreitung in Richtung der Achsen ϑ und φ . Für die +/- φ -Richtung mit der Phasengeschwindigkeit $\mathbf{c}_\varphi = +/- \mathbf{c}_{e_\varphi}$ sind die Lösungen III. Art maßgebend und haben das Potential Φ^{III} und den Ausschlag \mathbf{s}^{III}

$$\Phi^{III} = (r/r_0)^\ell T^{III} U^{III} V^I = (r/r_0)^\ell \exp i(\omega t +/- m\varphi) P_{\ell m}(\vartheta) \quad (14)$$

$$\mathbf{s}^{III} = (\nabla\Phi^{III})_r + (\nabla\Phi^{III})_\varphi \quad (15)^*$$

Bei einer deviatorischen \mathbf{s} -Verformung versagt wegen $\text{div } \mathbf{s} = 0$ und $\text{rot } \mathbf{s} = \mathbf{0}$ das Cauchy'sche Kräftegleichgewicht. Deshalb wird – hypothetisch [1, 2] – das ranghöhere Impuls-gleichgewicht (14) von kinetischem $\rho \mathbf{c}_\varphi \mathbf{s}^\circ$ und potentielltem Impulsfluss $\mathbf{G}\nabla\mathbf{s} = \rho c^2 \nabla\mathbf{s}$ angesetzt. Diese skalar mit $\mathbf{c}_\varphi = \mathbf{c}_{e_\varphi}$ multipliziert vereinfacht auf die Vektorgleichung (17).

$$\rho \mathbf{c}_\varphi \mathbf{s}^\circ +/- \rho c^2 \nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{s}^\circ +/- \mathbf{c}_{e_\varphi} \cdot \nabla\mathbf{s} = 0 \quad (16)(17)$$

$$i\omega_\ell \mathbf{s} +/- i c \ell (r_0 \sin \vartheta)^{-1} \mathbf{s} = 0 \quad (18)$$

Formal handelt es sich bei (17) um eine Säkulargleichung mit der Forderung \mathbf{s}° parallel \mathbf{c}_φ bzw. \mathbf{e}_φ . Diese Richtung entspricht der Hauptachse des Tensors $\nabla\mathbf{s}$ und ist identisch der Ausbreitung der Huygens'schen Elementarwelle. Die Auflösung liefert eine Oberflächenwelle mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_\ell = \ell c/r_0$ und der Amplitude $(r/r_0)^\ell (\sin \vartheta)^{-1}$.

Die Beschreibung der Laufwelle in ϑ -Richtung unterbleibt, da keine Lösung III. Art V^{III} der Legendre-Polynome recherchiert werden konnte. Auch wird auf den Anhang verwiesen.

Verwandte Führungswellen.

Kugelhaverne. (Fig. 2) Die deviatorische Führungswelle für den zu Fig. 1 komplementären Kugelbereich $r_0 < r < \infty$ lässt sich ebenfalls auf die Lösung Ω der Laplace-Gleichung $\Delta\Omega = 0$ zurückführen. [3. S.295]

$$\Omega = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_{\ell m} \quad \Omega_{\ell m} = (r_0/r)^\ell T_l U_\varphi V_\vartheta \quad (19,20)$$

Die $\Omega_{\ell m}$ -Moden haben dieselbe Winkelabhängigkeit wie die Kugel-Moden $\Phi_{\ell m}$. Unterschiedlich ist die reziproke r -Abhängigkeit $(r_0/r)^\ell$ wonach mit größer werdender Entfernung mit $r_0 \ll r \rightarrow \infty$ die Schwingamplitude verschwindet.

2D-Kreisscheibe. Die deviatorische Führungswelle an einer ebenen Kreisscheibe mit Radius r_0 [m] und den Polar-Koordinaten $\mathbf{r}_e, \varphi_{e_\varphi}$ hat analog der 3D-Kugel ein Potential $\phi(r, \varphi)$ [m²] und mit der Bedingung $\Delta\phi = 0$ die bekannten Lösungen ϕ_ℓ [3. S.295] und die elastische Auslenkung $\mathbf{s}_\ell = \nabla\phi_\ell$

$$\phi = \sum_\ell \phi_\ell \quad \phi_\ell = A_\ell (r/r_0)^\ell \exp i(\omega t +/- \ell\varphi) \quad (21, 22)$$

$$\mathbf{s}_\ell = A_\ell \ell r^{\ell-1} r_0^{-\ell} \exp i(\omega t +/- \ell\varphi) [\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi] \quad (23)^*$$

Der Term $\exp +/- \ell\varphi$ beschreibt die beiden in +/- φ -Richtung laufenden Wellen. Deren Superposition ergibt mit der Identität $\frac{1}{2} (\exp +i\ell\varphi + \exp -i\ell\varphi) = \cos \ell\varphi$ die Stehwellen:

$$\mathbf{s}_\ell = A_\ell \ell r^{\ell-1} r_0^{-\ell} \cos \ell\varphi [\mathbf{e}_r + i \mathbf{e}_\varphi] \exp i\omega t \quad (24)^*$$

Wegen $\mathbf{s}_\ell \sim r^{\ell-1}$ ist im Zentrum $r \rightarrow 0$ die Auslenkung $\mathbf{s}_\ell \rightarrow \mathbf{0}$ und aus $\mathbf{s}_\ell \sim [\mathbf{e}_r + i \mathbf{e}_\varphi]$ erkennt man die gleich großen Amplituden in \mathbf{e}_r - und in \mathbf{e}_φ -Richtung; der Imaginärteil $i\mathbf{e}_\varphi$ bedeutet eine Phasendifferenz von 90° und bewirkt so eine kreisförmige \mathbf{s}_ℓ -Bewegung.

Anhang.

Nabla-Operator. Werden die angezogenen Beziehungen

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial\Phi}{r\partial\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial\Phi}{r\sin\vartheta\partial\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (25)^*$$

$$\text{div } \mathbf{s} = \frac{\partial r s_r}{r \partial r} + \frac{\partial \sin \vartheta s_\vartheta}{r \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial s_\varphi}{r \sin \vartheta \partial \varphi} \quad (26)$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial}{r \partial r} \frac{\partial r\Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{r^2 \sin \vartheta \partial \vartheta} \frac{\partial \Phi \sin \vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 \Phi}{(r \sin \vartheta)^2 \partial \varphi^2} \quad (27)$$

alternativ über den Nabla-Operator ∇ generiert nach

$$\text{div } \mathbf{s} \equiv \nabla \cdot \mathbf{s} \quad \Delta\Phi \equiv \nabla \cdot \nabla\Phi \equiv \nabla^2\Phi \quad (28)(29)$$

so ergeben sich Unstimmigkeiten bei den r - und ϑ -Termen:

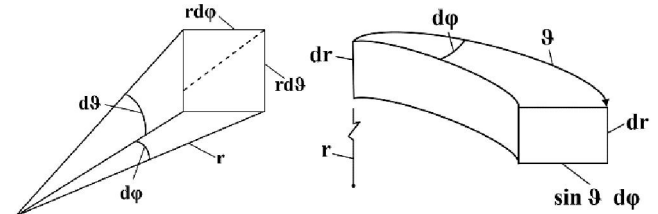


Fig. 3 Gradient in r -Richtung Fig. 4 Gradient in ϑ -Richtung

r -Gradient. Fig. 3. Der für die r -Richtung maßgebende, differentielle Kugelsektor mit dem Öffnungswinkel $d\Omega = d\vartheta d\varphi$ entspricht einem konusförmigen Wellenleiter. In [2] ergab sich für den r -Gradienten $(\nabla\Phi)_r$ und daraus $(\Delta\Phi)_r$

$$(\nabla\Phi)_r = \frac{\partial r\Phi}{r \partial r} \mathbf{e}_r = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r} \right] \mathbf{e}_r \quad (30)$$

$$(\Delta\Phi)_r = \frac{\partial}{r \partial r} \frac{\partial r\Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (31)$$

Beide Versionen – (27) und (31) - liefern denselben Laplace-Operator $(\Delta\Phi)_r$. Die r -Gradienten dagegen sind nur im Fernfeld $r \rightarrow \infty$ gleich: Der konventionelle Gradient $\partial\Phi/\partial r$ (25) zeigt im konusförmigen Wellenleiter einen Pegelverlauf entsprechend der nur via Reihenentwicklung darstellbaren, sphärischen Bessel-Funktion. Dagegen hat der Gradient $\partial r\Phi/\partial r$ (30) die einfache, analytische Lösung $r^{-1} \exp ikr$. – Auch der 2D-Fall mit dem r -Gradient $(\nabla\Phi)_r = \partial \Phi \sqrt{r}/\sqrt{r} \partial r$ ergibt wieder einen analytischen Pegelverlauf nach $r^{0.5} \exp ikr$.

ϑ -Gradient. Fig. 4. In ϑ -Richtung stellt der differentielle $dr d\varphi$ -Kanal mit der Breite $\sin \vartheta rd\varphi$ und der Höhe $dr = \text{const}$ an sich einen 2D-Wellenleiter dar. Ein ∇_ϑ -Ansatz für einen solchen Kanalverlauf ist: ($a = 0,5$ für 2D; $a = 1$ für 3D)

$$(\nabla\Phi)_\vartheta = \frac{\partial\Phi \sin^a \vartheta}{r \sin^a \vartheta \partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta = \left[\frac{\partial\Phi}{r \partial \vartheta} + \frac{a \Phi \cot \vartheta}{r} \right] \mathbf{e}_\vartheta \quad (32)$$

Quellenverzeichnis.

- [1,2] O. Bschorr: DAGA-Fortschritte der Akustik.
- [1] DAGA 2014. S. 80/81. [2] DAGA 2016. S. 268/9.
- [3] E. Madlung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. 4. Auflage. Springer- Verlag Berlin. (1950)
- [4] M. Abramowitz, A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications Inc. N.Y. 9. Printing. (1970).
- [5] J. Lense: Kugelfunktionen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG. Leipzig (1950)