

# Endochrone Materialmodelle zur Beschreibung von Schwingungssystemen

Thomas Kletschkowski

HAW Hamburg, 20099 Hamburg, E-Mail: thomas.kletschkowski@haw-hamburg.de

## Einleitung

Zur passiven, semi-aktiven oder vollständig aktiven Reduktion mechanischer Schwingungen können unter Anderem breitbandig abgestimmte und dissipativ wirkende Absorber oder eher schmalbandig wirkende und das Prinzip der Massenkraftkompensation ausnutzende Schwingungstilger eingesetzt werden. Deren Auslegung liegt die Annahme viskoser und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungseffekte zugrunde, siehe [1]. Eine Ausnahme bilden aktive Reibdämpfer, siehe [2] und [3], in denen die Dissipation durch Variation der Normalkraft an die Betriebsbedingungen angepasst wird, wobei oftmals zwischen Haften und Gleiten unterschieden werden muss.

Eine Alternative bieten endochrone Materialmodelle der Plastizität, siehe [4]–[8], die kontinuierlich ohne Fließbedingung ausgewertet werden können. Zwar ist keine passive mechanische Realisierung derartigen Materialverhaltens bekannt, allerdings lassen sich endochrone Kennlinien in semi-aktiven und aktiven Systemen elektronisch unterstützt realisieren.

Ein derartiges Vorgehen wird in der vorliegenden Arbeit – vergleichend zur Auslegung optimaler Tilger nach Den Hartog, siehe [1], in dimensionsloser Betrachtung vorgestellt, um Vor- und Nachteile einer frequenzunabhängigen Dämpfung im Zeit- und Frequenzbereich anhand von Ergebnissen numerischer Simulationen diskutieren zu können.

Weitere Anwendungen werden derzeit im Zusammenhang mit der Schwingungsanalyse von Radialwellendichtringen aus glasfaserverstärktem Polytetrafluoräthylen untersucht werden, wobei Vielteilchenmodelle in Kombination mit viskoplastischen endochronen Materialmodellen zum Einsatz kommen, siehe [9].

## Endochrones Materialverhalten

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendete Modell der endochronen Plastizität basiert auf der von Krawietz, siehe [7], vorgeschlagenen Modellbildung. In dieser wird geschwindigkeitsunabhängiges Materialverhalten durch eine additive Zerlegung der technischen Dehnung  $\varepsilon$  in elastische  $\varepsilon_{el}$  und plastische  $\varepsilon_{pl}$  Anteile, siehe Gleichung (1), mittels Reihenschaltung einer linearen Feder (mit dem elastischen Gesetz nach Gleichung (2)) und eines inelastischen Elements mit der Entwicklungsgleichung (3) vorgeschlagen:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}, \quad (1)$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_{pl}), \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \frac{1}{Y} \sigma |\dot{\varepsilon}|. \quad (3)$$

$E$  beschreibt den Elastizitätsmodul und  $Y$  die Fließeigenschaft. Für monotone Zugbelastung lässt sich das mit Hilfe der Gleichungen (1)–(3) beschriebene Modell vollständig integrieren

$$\sigma = Y \left( 1 - e^{-\frac{E}{Y} \varepsilon} \right). \quad (4)$$

Gleichung (4) beschreibt ein unterlineares Materialverhalten, bei dem die technische Spannung  $\sigma$  mit zunehmender Dehnung gegen den als Sättigungsparameter interpretierbaren Grenzwert  $Y$  strebt.

Im Hinblick auf das Dissipationsverhalten ist insbesondere der Vergleich zu klassischen viskoelastischen Elementen, wie dem Maxwell-Element interessant. Letzteres besteht aus der Reihenschaltung einer linearen Feder mit einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer und ist durch die nachfolgenden Gleichungen charakterisiert:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_v, \quad (5)$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_v), \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{1}{\eta} \sigma, \quad (7)$$

wobei  $\eta$  die Viskosität des Materials beschreibt. Ein Vergleich des durch Gleichung (1)–(3) einerseits und Gleichung (5)–(7) andererseits beschriebenen Materialverhaltens erfolgt in dimensionsloser Schreibweise (Amplituden werden durch ein „Dach“ und dimensionslose Größen durch eine „Tilde“ gekennzeichnet) für harmonische Anregungen. Das Maxwell-Element antwortet auf diese mit dem linearen und von der dimensionslosen Kreisfrequenz  $\tilde{\Omega}$  bestimmten Übertragungsverhalten:

$$\tilde{\sigma} = \frac{j \cdot \tilde{\Omega} \cdot \tilde{E}}{j \cdot \tilde{\Omega} + \tilde{E}/\tilde{\eta}} \cdot \tilde{\varepsilon} \quad \text{mit } j = \sqrt{-1}. \quad (8)$$

Das endochrone Material gehorcht folgendem nichtlinearen und frequenzunabhängigen Zusammenhang:

$$\tilde{\sigma} = \frac{j \cdot \tilde{E}}{j + (\tilde{E} \cdot |\tilde{\varepsilon}|)/\tilde{Y}} \cdot \tilde{\varepsilon}. \quad (9)$$

Die zugehörigen Hysteresekurven sind in Abbildung 1 für zwei unterschiedliche Anregungsfrequenzen dargestellt. Während die Dissipation des Maxwell-Elementes mit zunehmender Frequenz anwächst (Abbildung 1, rechts), bleibt die Dissipationsleistung des endochronen Elementes bei zunehmender Frequenz unverändert (Abbildung 1, links).

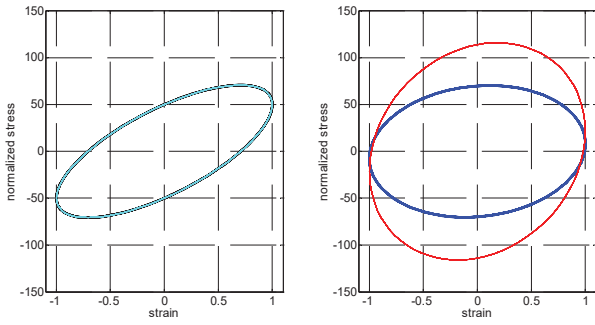


Abbildung 1: Hystereseverhalten eines endochronen Elementes (links) und eines Maxwell-Elementes (rechts) bei fester Frequenz aber unterschiedlichen Fließeigenschaften.

### Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

Das Verhalten schwingungsfähiger Systeme mit einem Freiheitsgrad und endochronem Materialverhalten, siehe Abbildung 2 (rechts), wird dem Verhalten eines klassischen Einmassenschwingers, siehe Abbildung 2 (links), gegenübergestellt.

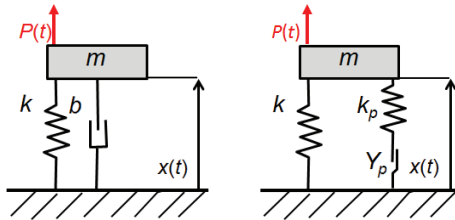


Abbildung 2: Einmassenschwinger mit viskoelastischem Verhalten (links) und endochronem Verhalten (rechts).

Der Schwinger mit endochronem Materialverhalten gehorcht folgenden Gleichungen:

$$m\ddot{x} + kx = P - F_c, \tag{10}$$

$$F_c = k_p (x - x_p), \tag{11}$$

$$\dot{x}_p = \frac{1}{Y_p} F_c |\dot{x}|, \tag{12}$$

wobei  $F_c$  die im endochronen Element verursachte Rückstellkraft beschreibt. Das Verhalten des klassischen Einmassenschwingers wird durch die lineare Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + kx = P - F_c \quad \text{mit} \quad F_c = b\dot{x} \tag{13}$$

beschrieben. Gleichungen (10)–(12) und Gleichung (13) wurden nach Einführen der dimensionslosen Zeit  $\tau := \omega \cdot t$  mit  $\omega := \sqrt{k/m}$  für die Anregung mit einem Einheitsstoß unter Anwendung eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung numerisch ausgewertet, wobei sowohl Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit zu Null initialisiert wurden. Für den klassischen Einmassenschwinger wurde dabei ein Dämpfungsgrad von 2% berücksichtigt. Federsteifigkeiten und Dissipation des Schwingers mit endochronem Materialverhalten wurde so justiert, dass sich ein im Hinblick auf die Resonanzüberhöhung ein ähnliches Verhalten ergab, siehe Abbildung 3.

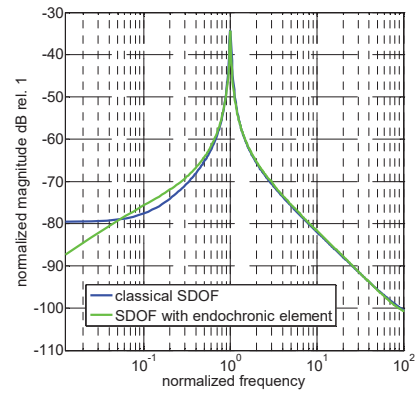


Abbildung 3: Amplitudenfrequenzgang eines klassischen (blau) und eines endochronen (grün) Einmassenschwingers.

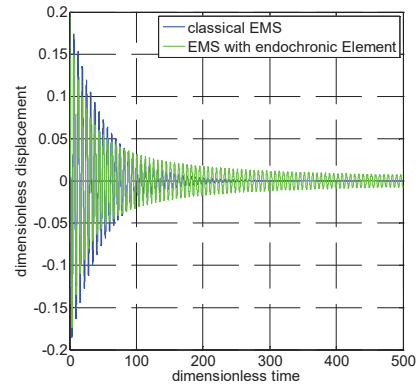


Abbildung 4: Abklingverhalten eines klassischen (blau) und eines endochronen (grün) Einmassenschwingers.

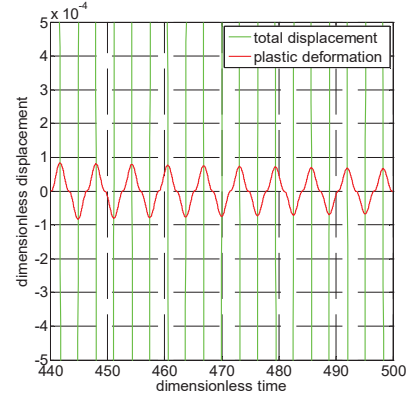


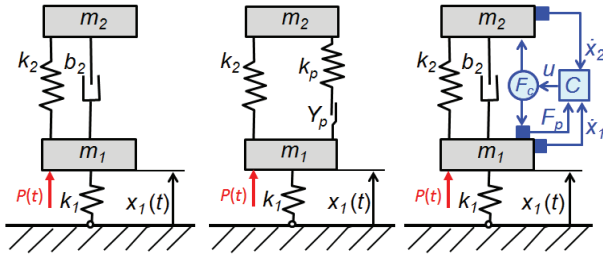
Abbildung 5: Ausschlagverhalten eines endochronen Einmassenschwingers. Auslenkung (grün) und plastische Deformation (rot).

Das Abklingverhalten beider Schwinger ist vergleichend in Abbildung 4 dargestellt. Aufgrund des exponentiellen Abfalls, erreicht der klassische Einmassenschwinger die Gleichgewichtslage in kürzerer Zeit, als der Einmassenschwinger mit endochronem Verhalten. Andererseits werden die Auslenkungen infolge der plastischen Dissipation zu Beginn des Ausschlagens stärker reduziert als infolge der viskosen Dämpfung.

Die infolge des endochronen Verhaltens induzierte Nichtlinearität, wird in der Entwicklung der plastischen Deformationen sichtbar, siehe Abbildung 5.

## Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden

Das Verhalten schwingungsfähiger Systeme mit zwei Freiheitsgraden wird am Beispiel der in Abbildung 6 skizzierten Schwingerketten diskutiert.



**Abbildung 6:** Zweimassenschwinger mit viskoelastischem Verhalten (links), endochronem Verhalten (Mitte) und aktiv geregeltes System (rechts).

Deren Dynamik wird durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschreiben:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = P - F_c, \quad (14)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = F_c. \quad (15)$$

Im Falle viskoser Dämpfung gilt:

$$F_c = b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \quad (16)$$

Für den Fall endochronen Materialverhaltens gilt:

$$F_c = k_p(x_2 - x_1 - x_p), \quad (17)$$

$$\dot{x}_p = \frac{1}{Y_p} F_c |\dot{x}_2 - \dot{x}_1|. \quad (18)$$

Für harmonische Anregungen lassen sich die Gleichungen (14)–(16) sowie (14)–(15) mit (17)–(18) unter Verwendung der dimensionslosen Größen und Schreibweisen

$$\tau := \omega_1 t \quad \text{mit} \quad \omega_1 := \sqrt{k_1/m_1} \quad (19)$$

$$\mu \lambda^2 := \sqrt{k_2/k_1} \quad \text{mit} \quad \mu := \sqrt{m_2/m_1} \quad (20)$$

$$\mu \lambda_p^2 := \sqrt{k_p/k_1} \quad (21)$$

$$\xi_i := x_i/x_0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

$$\sigma_{p0} := P_0/Y_p = x_0 k_1/Y_p \quad \text{und} \quad \hat{\sigma} := \hat{P}/P_0 \quad (23)$$

$$2D\omega_1 := b_2/m_1 \quad (24)$$

in die nachfolgenden Gleichungssysteme überführen:

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu \lambda^2 - \tilde{\Omega}^2 + j2D\tilde{\Omega} & -\mu \lambda^2 - j2D\tilde{\Omega} \\ -\mu \lambda^2 - j2D\tilde{\Omega} & \mu(\lambda^2 + \tilde{\Omega}^2) + j2D\tilde{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{bmatrix} = \hat{\sigma} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu \lambda^2 - \tilde{\Omega}^2 & -\mu \lambda^2 \\ -\mu \lambda^2 & \mu(\lambda^2 + \tilde{\Omega}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{bmatrix} = \hat{\sigma} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \quad (26)$$

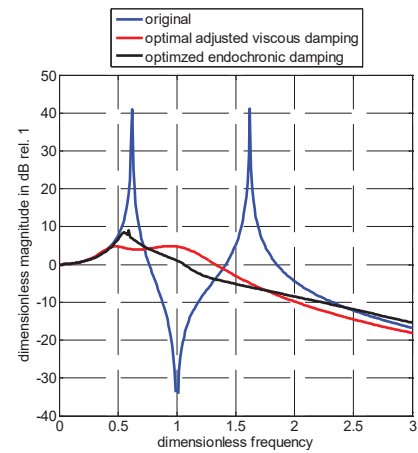
$$\dots \frac{j\mu \lambda_p^2 (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1)}{j + \mu \lambda_p^2 \sigma_{p0}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Gleichung (25) beschreibt den klassischen Zweimassenschwinger, wohingegen das Verhalten des endochronen Schwingers durch Gleichung (26) beschrieben wird.

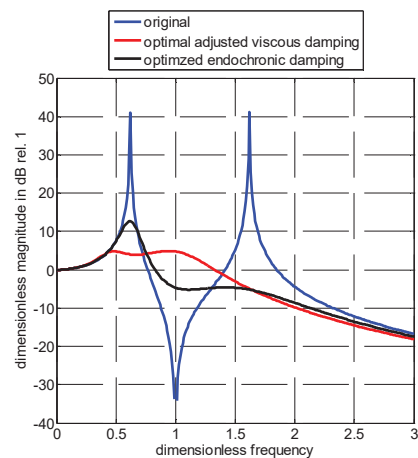
Das Verhalten des klassischen Zweimassenschwingers ohne Anpassungen zur Schwingungsreduktion wird durch die Parameter  $D = 0.0$ ,  $\lambda = 1.0$  und  $\mu = 1.0$  beschrieben. Für die optimale Abstimmung nach Den Hartog, siehe [1], wurden die in Gleichung (27) angegebenen Größen verwendet.

$$D_{opt} = \sqrt{3\mu^3/8(1+\mu)^3} \approx 0.21, \quad \lambda_{opt} = 1/(1+\mu) = 0.5, \quad \mu = 1.0 \quad (27)$$

Die Abstimmung des Zweimassenschwingers mit endochronem Materialverhalten nach Abbildung 6 (Mitte) erfolgte unter Verwendung eines genetischen Optimierungsverfahrens. Für die unten dargestellten Ergebnisse wurden die Parameter  $\mu = 1.0$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $D = 0.0$ ,  $\lambda_p = 1.41$ ,  $\sigma_{p0} = 1.14$  verwendet. Weiterhin wurde durch manuelle Einstellung der Parameter im endochronen Element untersucht, ob sich eine optimale Tilgerauslegung durch den Einsatz eines endochronen Elementes unterstützen lässt. Das Systemverhalten wurde in diesem Fall mit den folgenden Parametern berechnet:  $\mu = 1.0$ ,  $\lambda_{opt} = 0.5$ ,  $D_{opt} = 0.21$ ,  $\lambda_p = 0.8$ ,  $\sigma_{p0} = 0.4$ .



**Abbildung 7:** Amplitudenfrequenzgang der Masse  $m_1$  für das originale (blau), das tilgende (rot) und das genetisch optimierte endochrone System (schwarz).



**Abbildung 8:** Amplitudenfrequenzgang der Masse  $m_1$  für das originale (blau), das tilgende (rot) und das manuell eingestellte endochrone System (schwarz).

Die zugehörigen Berechnungsergebnisse sind in den Abbildungen 7 und 8 dargestellt. Abbildung 7 verdeutlicht, dass

mit Hilfe endochroner Ansätze Schwingungsminderungen erreicht werden können, die sich denen der konventionellen Tilgerauslegung annähern lassen. Die in Abbildung 8 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die Unterstützung der optimalen Tilgerauslegung durch ein Element mit endochronem Materialverhalten zusätzliche Reduktionen im Bereich der Tilgerfrequenz ermöglicht, wenn eine Überhöhung der Schwingungsantwort im Bereich der ersten Resonanz akzeptiert werden kann.

$$\hat{\sigma}_d = j \cdot 2D\hat{\Omega} \cdot (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1) \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}_c = \frac{j \cdot \mu\lambda_p^2 \cdot (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1)}{j + \mu\lambda_p^2 \hat{\sigma}_{p0} \cdot |\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1|} \quad (29)$$

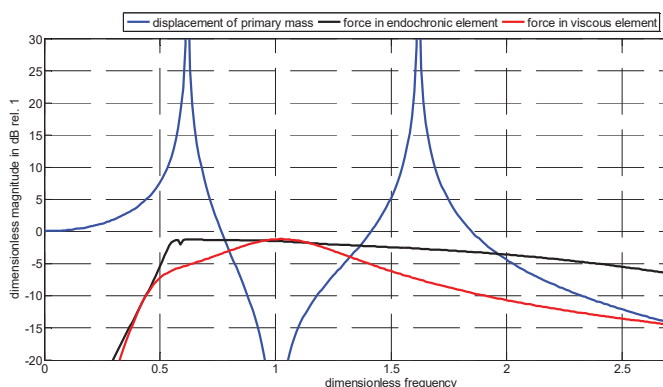


Abbildung 9: Amplitudenfrequenzgang der Masse  $m_1$  für originales System (blau) sowie Kräfte in Dämpfer (rot) und genetisch optimiertem endochronen Element (schwarz).

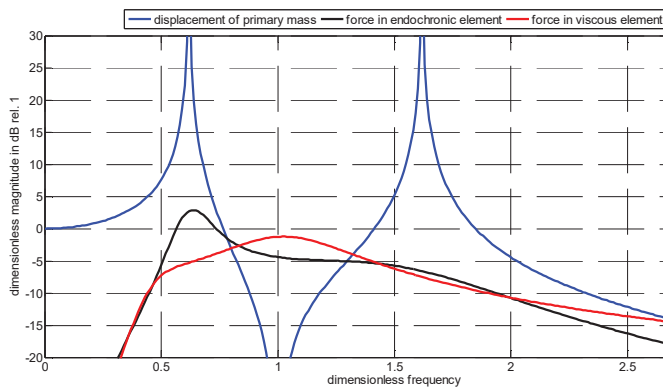


Abbildung 10: Amplitudenfrequenzgang der Masse  $m_1$  für originales System (blau) sowie Kräfte im Dämpfer (rot) und im manuell optimierten endochronen Element (schwarz).

Für beide Untersuchungen wurde ebenfalls der dimensionslose Kraftverlauf im Dämpfer, siehe Gleichung (28), und im endochronen Element, siehe Gleichung (29), ausgewertet. Die zugehörigen Kurven sind in den Abbildungen 9 und 10 dargestellt. Abbildung 9 verdeutlicht, dass sich mit Hilfe eines optimal abgestimmten endochronen Elementes, eine über weite Frequenzbereich konstante Kraft in das System ein-bringen lässt. Für die optimale viskose Dämpfung werden jeweils im Bereich der Tilgerfrequenz maximale Werte erreicht.

Der Signalflussplan zur elektronisch unterstützten Realisierung eines endochronen Elementes nach Abbildung 6 (rechts) ist in Abbildung 11 skizziert.

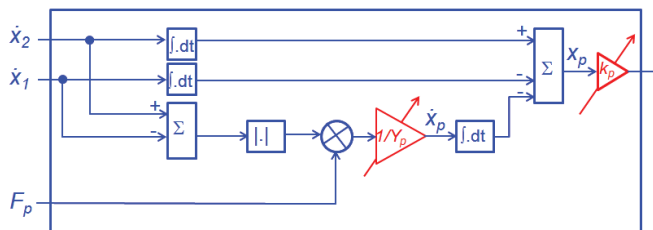


Abbildung 11: Möglicher Signalfluss bei elektronischer Umsetzung endochronen Verhaltens mit Adaption.

Im Unterschied zu dem zuvor simulierten Verhalten ist hier bereits die Adaption der das endochrone Element charakterisierenden Parameter angedeutet.

## Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasst sich endochronen Materialmodellen, die zur Beschreibung schwingungsfähiger Systeme eingesetzt werden können. Insbesondere wurde die Möglichkeit zur Auslegung von endochronen Schwingungstilgern diskutiert und mit dem klassischen Vorgehen verglichen. Da die praktische Umsetzung nur mit Mitteln der Mechatronik gelingen kann, sollten zukünftige Arbeiten die Anpassung der endochronen Materialparameter mit adaptiven Verfahren berücksichtigen.

## Literatur

- [1] Den Hartog, J. P.: Mechanische Schwingungen. Springer, Berlin, 1936.
- [2] Stammers, C. W., Sireteanu, T.: Vibration control of machines by use of Semi-active dry friction damping. J. Sound and Vibration, 209(4), 1998, 671-684
- [3] Gaul, L., W., Nitsche, R.: Friction control for vibration supression. Mechanical Systems and Signal Processing, 14(2), 2000, 139-150
- [4] Valanis, K.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part I: General theory. Archive of Applied Mechanics 23, 1971, 517-533.
- [5] Valanis, K.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part II: Application to mechanical behaviour of metals. Archive of Applied Mechanics 23, 1971, 535-551.
- [6] Haupt, P.: Viskoelastizität und Plastizität Thermodynamisch konsistente Materialgleichungen. Springer, Berlin, 1977.
- [7] Krawietz, A.: Materialtheorie, Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens. Springer, Berlin, 1986
- [8] Kletschkowski, T., Bertram A., Schomburg, U.: Endochronic viscoplastic material models for filled PTFE. Mechanics of Materials 34, 2002, 795-808.
- [9] Albrecht, F., Kletschkowski, T.: Simulation von Wellendichtringen mit einer Vielteilchenmethode. Tagungsband 19th ISC, 12.-13. Oktober 2016, Stuttgart, Deutschland.