

Untersuchungen zur numerischen Dämpfung bei der Randelementemethode am Beispiel eines akustischen Innenraumproblems

Suhaib K. Baydoun¹, Steffen Marburg¹

¹ Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, TU München, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching bei München, Germany

Einleitung

Die Randelementemethode (BEM) findet eine breite Anwendung zur numerischen Lösung von Problemstellungen aus der linearen Akustik und wird unter anderem in [1, 2] beschrieben. Dadurch, dass nur der Rand des Fluidgebiets modelliert wird, sind im Vergleich zur Finiteelementemethode (FEM) im Allgemeinen weniger Freiheitsgrade notwendig. Auch die implizite Erfüllung der Abstrahlbedingung in den Freiraum ist ein wichtiger Vorteil gegenüber der FEM. Eine Eigenschaft der FEM ist der in [3] diskutierte Pollutioneffekt - ein sich über das Rechengebiet kumulierender, numerischer Fehler, der sich nur durch eine globale Verfeinerung des Netzes verringern lässt.

Es ist weithin unbekannt, dass ein ähnlicher Effekt auch bei der BEM auftritt. Er wird im Folgenden als numerische Dämpfung bezeichnet. Dieser Effekt wurde erstmals in [4] erwähnt und wurde erst in jüngster Zeit am Beispiel eines akustischen Innenraumproblems genauer untersucht [5]. Die folgende Arbeit baut auf letzterem auf und stellt eine Methode zur Quantifizierung der numerischen Dämpfung bei akustischen Innenraumproblemen vor. Basierend auf der Halbwertsbreite der Druckamplitudenerhöhung wird aus einer Frequenzgangkurve der äquivalente, viskose Dämpfungskoeffizient ermittelt. Die Ergebnisse lassen auf einen exponentiellen Zusammenhang zwischen dem Dämpfungskoeffizienten und der Frequenz schließen. Ein beispielhafter Vergleich des Dämpfungskoeffizienten mit der Schallabsorption von Luft bestätigt die Wichtigkeit, numerische Dämpfung bei der Simulation von akustischen Innenraumproblemen mittels der BEM zu berücksichtigen.

Numerische Dämpfung bei der Randelementemethode am Beispiel einer zweidimensionalen Schallwelle im geschlossenen Rohr

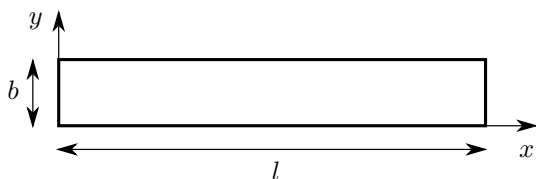


Abbildung 1: Geometrie des zweidimensionalen, geschlossenen Rechteckrohrs

Im Folgenden wird das Phänomen der numerischen Dämpfung an einem akustischen Innenraumproblem vorgestellt. Es handelt sich um das in Abbildung 1 dar-

gestellte, zweidimensionale Modell eines Rechteckrohrs mit der Länge $l = 3.4$ m und der Breite $b = 0.2$ m. Es ist vollständig gefüllt mit Luft der Dichte $\rho = 1.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und der Schallgeschwindigkeit $c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Durch eine harmonische Anregung bei $x = 0$ mit der Oberflächenschnelle $v_0 = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ entsteht eine Schallwelle, die am Ende $x = 3.4$ m des allseitig starren Rohres vollständig reflektiert wird. Das betrachtete System ist frei von Dämpfung und entsprechend sind Resonanzfrequenzen an den ganzzahligen Vielfachen von 50 Hz zu erwarten. Dort bilden sich stehende Wellen mit unendlicher Amplitude aus. Die Phasensprünge an den Resonanzfrequenzen betragen 180° . Das dreidimensionale Pendant dieses Modells wurde in [6, 7] untersucht und in [8] als Benchmarkproblem der numerischen Akustik definiert.

Der Frequenzgang dieses Systems wurde mit der BEM unter Anwendung der Kollokationsmethode untersucht. Das verwendete Netz besteht aus insgesamt 32 eindimensionalen Randelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen zur Approximation des Schalldrucks, wobei die Längskanten mit je 15 Elementen diskretisiert wurden. Die Anzahl der Integrationspunkte wurde bei den nicht-singulären Integralen adaptiv mittels einer relativen Abstandsfunktion nach [9] ausgewählt. Die singulären Integrale wurden nach [10] in Teilintervalle zerlegt. Der Frequenzgang wurde bis 520 Hz untersucht. Bei 500 Hz werden fünf stehende Wellen erwartet, was einem Verhältnis von drei Elementen pro Wellenlänge entspricht. Nach [6] ist dabei ein numerischer Fehler kleiner 5% in der L^∞ -Vektornorm zu erwarten.

In Abbildung 2 ist der Schalldruckpegel und der Phasenwinkel in der Rohrmittte bei $x = 1.7$ m, $y = 0.1$ m dargestellt. An dem Punkt treten nur alle 100 Hz Resonanzen auf, da er an den Moden bei den ungeraden Vielfachen von 50 Hz mit einem Schwingungsknoten zusammenfällt. Es sind deutliche Druckspitzen zu erkennen, wobei die maximalen Amplituden mit steigender Ordnung der Moden abnimmt. Abbildung 3 zeigt die Frequenzgänge um 100 und 500 Hz im Detail. Die Amplitudenüberhöhung bei 500 Hz ist erkennbar niedriger und breiter als bei 100 Hz. Auch die Phasensprünge in Abbildung 2 sind an den niederfrequenten Resonanzen noch scharfkantig und bei 400 und 500 Hz bereits deutlich abgerundet.

Diese Phänomene lassen auf eine numerische Dämpfung bei der BEM schließen. Außerdem scheint das Ausmaß der Dämpfung mit der Frequenz zu steigen. Die numerische Dämpfung lässt sich nicht nur bei dem hier beschriebenen Fall der vollständig reflektierten Schallwelle, sondern auch bei einer Wanderwelle beobachten. Der Leser sei hierfür auf [5] verwiesen. Im folgenden Abschnitt wird eine Methode zur Quantifizierung des Dämpfungsgrades

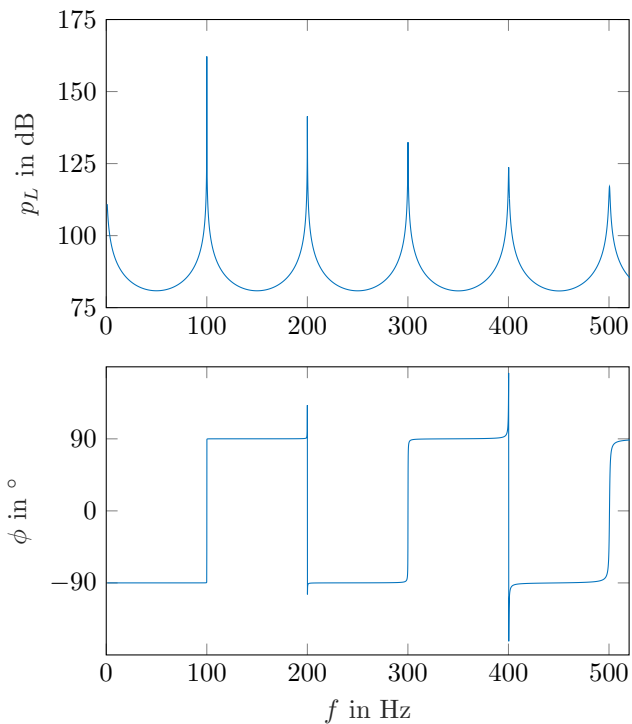


Abbildung 2: Schalldruckpegel (oben) und Phasenwinkel (unten) in der Rohrmitte

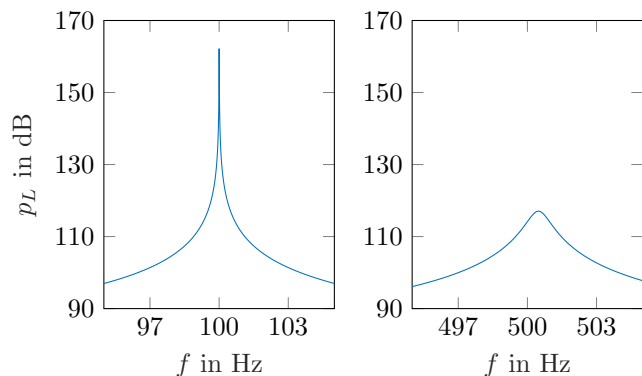


Abbildung 3: Amplitudenüberhöhung des Schalldruckpegels in der Rohrmitte bei 100 Hz (links) und 500 Hz (rechts)

auf Basis von Frequenzgangkurven vorgeschlagen.

Quantifizierung der numerischen Dämpfung

Herleitung der Halbwertsbreitenmethode für akustische Innenraumprobleme

Um den durch numerische Dämpfung induzierten Fehler abzuschätzen zu können, muss ihr Ausmaß quantifiziert werden. Dazu wird hier angenommen, dass die numerische Dämpfung sich qualitativ wie eine viskose Dämpfung des Fluids verhalte - also proportional zur Zeitableitung des Drucks sei. Die hier vorgestellte Methode basiert auf der Halbwertsbreite der Druckamplitudenüberhöhung.

Die Methode der Halbwertsbreite ist ein häufig

angewandtes Verfahren zu experimentellen Dämpfungsbestimmung aus Frequenzganganalysen. Für mechanische Einfreiheitsgradsysteme ist sie unter anderem in [11, 12] beschrieben. Der Ausgangspunkt der Herleitung für das akustische Innenraumproblem ist die skalare, gedämpfte, homogene Wellengleichung in einer Dimension:

$$p''(x, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}(x, t) - \alpha \dot{p}(x, t) = 0, \quad (1)$$

in der α der Dämpfungskoeffizient ist, den es aus dem Frequenzgang zu bestimmen gilt. Nach Trennung der Veränderlichen lässt sich der Druck als $p(x, t) = f(x)p(t)$ schreiben. Zur Dämpfungsbestimmung sind lediglich die Frequenzbereiche an den Resonanzen von Interesse. Dort bestehen die Wellen nur aus stehenden Anteilen. Unter der Annahme kleiner Dämpfungen kann daher näherungsweise eine sinusförmige Ortsfunktion

$$f(x) = Ae^{ikx} \quad (2)$$

mit realer Wellenzahl $k = \frac{2\pi f}{c}$ angesetzt werden. Zweimaliges Ableiten, Einsetzen in (1) und Einführung einer harmonischen Anregung auf der rechten Seite führt zu

$$\ddot{p}(t) + \alpha c^2 \dot{p}(t) + \underbrace{c^2 k^2}_{\omega_0^2} p(t) = A_e e^{-i\omega_e t}. \quad (3)$$

Sie beschreibt den Druckverlauf im Zeitbereich an einem diskreten Punkt im Fluid und ist verwandt mit der Differenzialgleichung eines mechanischen Einfreiheitsgradsystems. Dabei entspricht ω_0 der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems. A_e und ω_e bezeichnen jeweils die Erregeramplitude und -kreisfrequenz. Im eingeschwungenen Zustand gilt für die zeitabhängige Druckfunktion $p(t) = \hat{P}e^{-i(\omega_e t + \phi)}$ mit der Druckamplitude \hat{P} und der Phasenverschiebung zur Erregung ϕ . Einsetzen in (3) und Umformen ergeben

$$\hat{P} = \frac{A_e}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (\alpha c^2 \omega_e)^2}},$$

$$\hat{P} = \omega_e \hat{P} = \frac{A_e \omega_e}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (\alpha c^2 \omega_e)^2}}$$

für die Schalldruckamplitude und ihre Zeitableitung \hat{P} . An der Resonanzfrequenz, die bei kleinen Dämpfungen in etwa mit der Eigenfrequenz übereinstimmt ($\omega_e = \omega_0$), beträgt die Zeitableitung der Druckamplitude

$$\hat{P}_r = \frac{A_e}{\alpha c^2}. \quad (4)$$

Ferner werden zwei Kreisfrequenzen ω_I und ω_{II} definiert, an denen die Amplitude zu $\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{P}_r$ abfällt - der Pegel also um 3 dB kleiner ist. Setzt man nun den Ausdruck mit

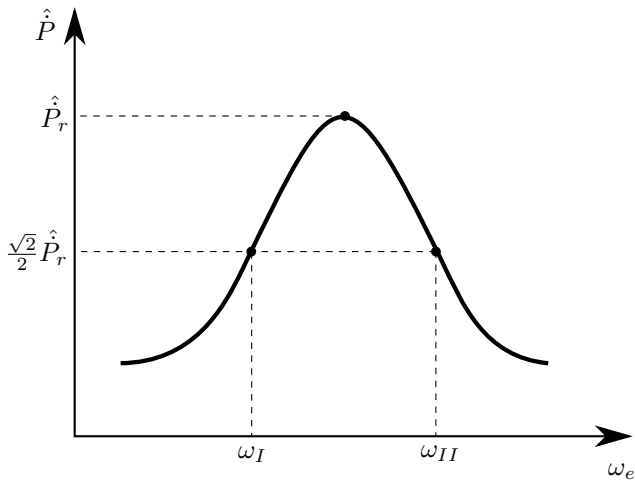


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Halbwertsbreitenmethode zur Dämpfungsbestimmung an den Resonanzfrequenzen eines akustischen Innenraumproblems

(4) ins Verhältnis und löst die quadratische Gleichung, ergeben sich

$$\omega_{I,II} = \sqrt{\left(\frac{\alpha c^2}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \pm \frac{\alpha c^2}{2}.$$

Kennt man ω_I und ω_{II} aus der Frequenzganganalyse, lässt sich der gesuchte Dämpfungskoeffizient α bestimmen nach

$$\alpha = \frac{\omega_{II} - \omega_I}{c^2}. \tag{5}$$

In Abbildung 4 ist die Anwendung der Halbwertsbreitenmethode für akustische Innenraumprobleme schematisch dargestellt. Dem Anwender müssen folgende Annahmen bei der Dämpfungsbestimmung bewusst sein:

- a) Die Dämpfung verhält sich qualitativ wie eine viskose Dämpfung. Sie ist also proportional zur Zeitableitung des Schalldrucks.
- b) Der Grad der Dämpfung ist klein. Somit ist Gleichung (2) gültig. Außerdem stimmen die Resonanzfrequenzen näherungsweise mit den Eigenfrequenzen des ungedämpften Systems überein.
- c) Die Dämpfung ist zwischen ω_I und ω_{II} frequenzunabhängig.

Quantifizierung der numerischen Dämpfung bei der zweidimensionalen Schallwelle im geschlossenen Rohr

Die im obigen Beispiel der Schallwelle im geschlossenen Rohr auftretende numerische Dämpfung wird im Folgenden quantifiziert. Bei identischem Netz mit 15 Elementen in Längsrichtung wurde der Dämpfungskoeffizient an den ersten zehn Resonanzfrequenzen von 50 bis 500 Hz mittels der Halbwertsbreitenmethode nach Gleichung (5)

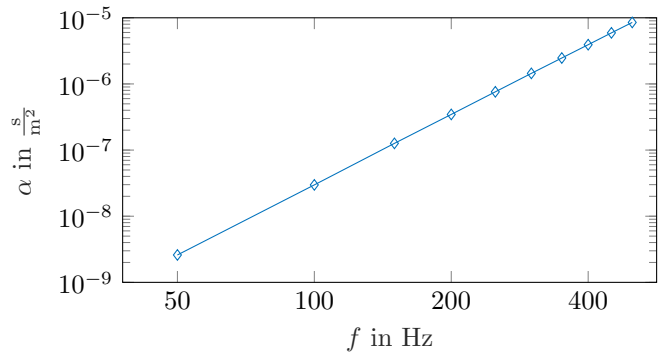


Abbildung 5: Dämpfungskoeffizient an den ersten zehn Resonanzfrequenzen für das Rechteckrohr mit 15 Randelementen in Schallausbreitungsrichtung

berechnet. Die Druckamplitude wurde dabei an der Stelle $x = 0.5$ m ausgewertet, um auch die ungeraden Vielfachen von 50 Hz berücksichtigen zu können. Die Frequenzabtastrate wurde so klein gewählt, dass am Maximum zwei benachbarte Werte der Druckamplitude weniger als 1% voneinander abweichen. In Abbildung 5 ist der Dämpfungskoeffizient über die Frequenz in logarithmischer Skalierung aufgetragen. Der lineare Verlauf lässt auf einen exponentiellen Zusammenhang

$$\alpha \propto f^\beta \tag{6}$$

mit problemabhängigem Exponenten β schließen. Um nun das Ausmaß der numerischen Dämpfung zu beurteilen, muss der viskose Dämpfungskoeffizient α zunächst in den Absorptionskoeffizienten α_{abs} der Einheit $\frac{dB}{m}$ umgerechnet werden. Nach [13] ergibt sich für die numerische Dämpfung bei 500 Hz $\alpha_{abs,500} = 0.0043 \frac{dB}{m}$, was in etwa dem Absorptionskoeffizienten von Luft bei eben jener Frequenz entspricht. Auch wenn es sich hier nur eine beispielhafte Untersuchung handelt und sich noch keine allgemeingültige Aussage treffen lässt, so geben die Ergebnisse einen klaren Hinweis auf die Relevanz der numerischen Dämpfung bei akustischen Innenraumproblemen. Daher sind weitergehende Studien zur numerischen Dämpfung notwendig.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine auf der Halbwertsbreite der Amplitudenüberhöhung basierende Methode zur Quantifizierung der numerischen Dämpfung bei der akustischen BEM hergeleitet. Ihre Anwendung wurde am Beispiel einer Schallwelle im geschlossenen Rohr demonstriert. Unter der Annahme, dass die numerische Dämpfung qualitativ einer viskosen Fluidämpfung gleich komme, wurden die Dämpfungskoeffizienten an den ersten zehn Resonanzfrequenzen ausgewertet. Die Ergebnisse lassen auf einen exponentiellen Zusammenhang zwischen dem Dämpfungskoeffizienten und der Frequenz schließen. Was ihr Ausmaß betrifft, wurde festgestellt, dass die durch die numerische Dämpfung verursachte Absorption in etwa der Absorption von Luft gleich kommt. Um ein umfassendes Bild über den Einfluss der

numerischen Dämpfung zu erhalten, sollten in Folgearbeiten weitere Elementtypen, Geometrien und Netzfeinheiten untersucht werden. Außerdem ist auch denkbar, die numerische Dämpfung anhand des Abklingverhaltens einer Wanderwelle zu quantifizieren und die Ergebnisse mit denen der Halbwertsbreitenmethode zu vergleichen. Des Weiteren sollte überprüft werden, ob ähnliche Effekte auch bei akustischen Außenraumproblemen und gekoppelten Struktur-Schall-Interaktionen auftreten.

Schließlich bleibt die Frage nach der Ursache für die numerische Dämpfung offen. Die Ergebnisse in [5] zeigen, dass die Verwendung einer realen Fundamentallösung für die Helmholtzgleichung und damit einhergehenden, rein realen Systemmatrizen die numerische Dämpfung unterdrückt. Dies deutet darauf, dass die komplexwertige Approximation der konventionellen BEM dafür verantwortlich sei. Allerdings zeigt [14], dass die real Fundamentallösung zu instabilen BEM-Formulierungen führt. Abschließend lässt der exponentielle Zusammenhang in Gleichung (5) darauf hoffen, dass in Zukunft eine Apriori-Abschätzung der numerischen Dämpfung möglich werde und somit reale Dämpfungssphänomene genauer simuliert werden können.

Danksagung

Diese Arbeit wurde vom DFG Schwerpunktprogramm 1897 „Calm, Smooth and Smart“ finanziell unterstützt und die Autoren drücken hiermit allen Beteiligten ihre Dankbarkeit aus.

Literatur

- [1] S. Marburg, B. Nolte (Hrsg.): Computational acoustics of noise propagation in fluids. Finite and boundary element methods. Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- [2] T.W. Wu (Hrsg.): Boundary element acoustics: Fundamentals and computer codes. WIT Press, Southampton, 2000
- [3] F. Ihlenburg: Finite element analysis of acoustic scattering. Springer-Verlag, New York, 1998
- [4] S. Marburg: Explicit frequency dependent matrices in the BE formulation. Sound and silence: Setting the balance - Proceedings of the Internoise (1998), 1533-1536
- [5] S. Marburg: Numerical damping in the acoustic boundary element method. Acta Acustica united with Acustica 102 (2016), 415-418
- [6] S. Marburg: Six boundary elements per wavelength. Is that enough? Journal of Computational Acoustics 10 (2002), 25-51
- [7] S. Marburg, S. Schneider: Influence of element types on numeric error for acoustic boundary elements. Journal of Computational Acoustics 11 (2003), 363-386
- [8] M. Hornikx, M. Kaltenbacher und S. Marburg: A platform for benchmark cases in computational acoustics. Acta Acustica united with Acustica 101 (2015), 811-820
- [9] A. Brebbia, J. F. C. Telles, L. C. Wrobel: Boundary element method. Springer Verlag, Berlin, 1984
- [10] V. Cutanda: Numerical transducer modelling. Proceedings of sixth international congress on sound and vibration (1999), 563-570
- [11] VDI-Richtlinie: VDI 3830 Blatt 5 Werkstoff- und Bauteildämpfung - Versuchstechniken zur Ermittlung von Dämpfungskenngrößen. Verein Deutscher Ingenieure (2005), Düsseldorf
- [12] H. Dresig, F. Holzweißig: Maschinendynamik. Springer Vieweg, 2012
- [13] A.J. Zuckerwar und R.W. Meredith: Low-frequency sound absorption measurements in air. NASA Ref. Publ. 1128 (1984)
- [14] F. Mattioli: Numerical instabilities of the integral approach to the interior boundary-value problem for the two-dimensional Helmholtz equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 15 (1980), 1303-1313