

# Transiente Green'sche Funktionen bei ringförmiger Anregung zur verbesserten Modellierung für die Entwicklung neuer Ultraschallmessverfahren

Mario Wolf<sup>1</sup>, Elfgard Kühnicke<sup>2</sup>

<sup>1</sup> TU Dresden, Institut für Festkörperelektronik, 01069 Dresden, Deutschland, Email: mario.wolf@tu-dresden.de

<sup>2</sup> TU Dresden, Institut für Festkörperelektronik, 01069 Dresden, Deutschland, Email: elfgard.kuehnicke@tu-dresden.de

## Einleitung

Moderne Ultraschallmessverfahren nutzen die Welleneigenschaften des Schalls aus, anstatt nur Amplitude und Laufzeit der reflektierten Signale auszuwerten. Notwendig dafür ist eine Erfassung der örtlichen Verteilung der reflektierten Welle, welche mit einem strukturierten Wandler erfolgen kann. So wurden von den Autoren u.a. Verfahren zur gleichzeitigen Schichtdicken und Schallgeschwindigkeitsmessung in mehrschichtigen Festkörpern [1] oder zur orts aufgelösten Schallgeschwindigkeitsmessung in Fluiden mit Streuteilchen [2] entwickelt. Um Auswertekriterien zu definieren und Messdaten zu qualifizieren ist eine genaue Kenntnis des abgestrahlten und reflektierten Schalls notwendig. Daher ist eine Simulation der Schallausbreitung notwendig. Dies erfolgte bisher auf der Basis genäherter harmonischer Green'scher Funktionen [3]. Diese beschreiben die Übertragungsfunktion bei punktförmiger Anregung an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien unter Berücksichtigung der physikalischen Randbedingungen. Um einen ausgedehnten Wandler zu modellieren, wird dessen aktive Fläche mit Punktquellen belegt und aus der Superposition derer Felder die Schalldruckverteilung im Inneren eines Mediums oder die Spannungsverteilung an einer Grenzfläche berechnet. Ausgehen von dieser Spannungsverteilung kann dann die Schallausbreitung im angrenzenden Medium und zurück zum Wandler modelliert werden. Für die Berechnung von Signalen ist ein harmonische Synthese (Schallfeldberechnung bei mehreren Frequenzen und Faltung mit dem Anregesignal) notwendig. Da in den Verfahren mit Annular-Arrays gearbeitet wird, deren Elemente aus konzentrisch angeordnete Ringen bestehen, liegen überwiegend radial-symmetrische Probleme vor. Somit ließe sich durch eine Berechnung in zwei, statt bisher in drei, Dimensionen der Rechenaufwand erheblich reduzieren. Dabei müssen die Grenzflächen nicht mehr mit Punkten, sondern mit Ringen belegt werden. Die Impulsantwort bzw. Übertragungsfunktion für eine ringförmige Anregung findet sich in der Literatur jedoch lediglich im Transformierten Gebiet. Auf die Rücktransformation wird meist nicht eingegangen. In [4] findet sich lediglich die Rücktransformation für einen Kolbenschwinger, welche jedoch nicht weiterhilft, da bei der Berechnung in angrenzende Medien mit einer ortsabhängigen Spannungsverteilung gerechnet werden muss.

In diesem Beitrag wird erstmalig ein Näherungsansatz vorgestellt, der auf genähernten Greenschen Funktionen für Punktquellen im Zeitbereich basiert.

## Ableitung Greenscher Funktionen

Grundlage für die Modellierung bildet die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten für das Verschiebungspotential  $\Phi$ .

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = 0 \quad (1)$$

Wendet man die Fourier und Hankeltransformation, mit  $J_0$  der Besselfunktion 1. Art und 0. Ordnung,

$$H_0(\xi) = \mathcal{H}(h(r)) = \int_0^\infty h(r)J_0(r\xi)rdr \quad (2)$$

an, erhält man eine gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi + (\xi^2 + k^2)\Phi = 0 \quad (3)$$

Diese kann mit einem einfachen Exponentialansatz gelöst werden.

$$\Phi^{H_0} = Ae^{-j\sqrt{\xi^2+k^2}z} + Be^{j\sqrt{\xi^2+k^2}z} \quad (4)$$

Die Konstanten lassen sich über die Randbedingungen bestimmen. So lässt sich z.B. die Spannung für eine punktförmige Anregung an einer freien Oberfläche mit

$$\sigma_{zz}(r) = \sigma_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (5)$$

beschreiben. Dabei ist  $\delta$  die Diracfunktion. Die Transformation führt zu

$$\sigma_{zz}^{H_0}(\xi) = \sigma_0 \quad (6)$$

Das Vorgehen zur Bestimmung der Konstanten, dem Aufstellen der Spannungs- und Verschiebungskomponenten sowie der notwendigen Rücktransformation ist ausführlich in [3] diskutiert. Für eine ringförmige Anregung an der Stelle  $r = a$  ergeben sich ein ähnlicher Ausdrücke.

$$\sigma_{zz}(r) = \sigma_0 \frac{\delta(r-a)}{2\pi(r-a)} \quad (7)$$

Entsprechend ergibt sich im transformierten Gebiet:

$$\sigma_{zz}^{H_0}(\xi) = \sigma_0 J_0(a\xi) \quad (8)$$

Für diesen soll im Folgenden kurz das Vorgehen zur Rücktransformation mittels Sattelpunktmethode erläutert werden.

### Rücktransformation mit der Sattelpunktmethode

Für die Rücktransformation der Punktquelle ist ein Integral der Form:

$$I = \int_0^\infty F(\xi) e^{-j\sqrt{k^2+\xi^2}z} J_0(r\xi) \xi d\xi \quad (9)$$

zu lösen. Das Ergebnis der Näherung ist das Feld einer Punktquelle mit Richtcharakteristik welches ab einem Abstand von  $\lambda/2$  von der Quelle gilt. Versucht man das Integral für die Ringquelle

$$I = \int_0^\infty F(\xi) e^{-j\sqrt{k^2+\xi^2}z} J_0(r\xi) J_0(a\xi) \xi d\xi \quad (10)$$

mit dem exakt gleichen Ansatz zu lösen indem man  $F'(\xi) = F(\xi)J_0(a\xi)$  substituiert, erhalte man eine Schallfeld mit Epizentrum im Ursprung. Tatsächlich muss dieses jedoch an der Stelle  $r = a$  liegen, sodass dieser Ansatz unbrauchbar ist. Stattdessen wird zunächst eine Integraldarstellung der Besselfunktion genutzt.

$$J_0(r\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{jx^2 + 2r\xi}} e^{-x^2+jr\xi} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{jx^2 - 2r\xi}} e^{-x^2-jr\xi} dx \quad (11)$$

Analog sieht die Darstellung für  $J_0(a\xi)$  aus. Da diese Summen multipliziert werden, ergeben sich mischterme mit  $r - a$  und  $r + a$  im Exponenten, sodass zunächst das Epizentrum an der richtigen Stelle liegt. Die Wurzeln werden entwickelt und die entstehenden Integrale gelöst, womit das Produkt aus zwei Besselfunktionen mittels einer Exponentialfunktion approximiert wird.

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(\xi)}{2\xi\sqrt{ar}} e^{-pz+j(r+a)\xi+\frac{\pi}{2}} \xi d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(\xi)}{2\xi\sqrt{ar}} e^{-pz+j(r-a)\xi+\frac{\pi}{2}} \xi d\xi \quad (12)$$

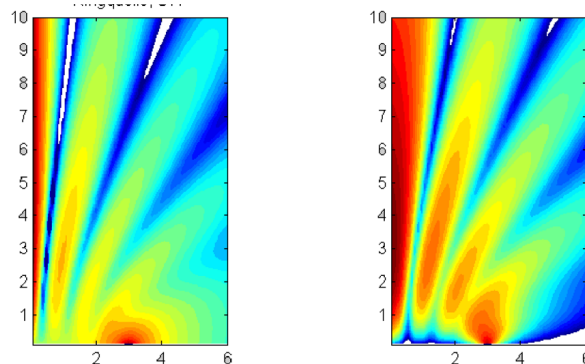
Auf diesen Ausdruck wird nun die eigentliche Sattelpunktmethode anwenden und man erhält.

$$I_1 = \frac{F(\xi_s)\cos\alpha}{\sqrt{2\pi k R a (R \sin(\alpha) - a)}} e^{-jkR} + \frac{F(\xi'_s)\cos\beta}{\sqrt{2\pi k R' a (R' \sin(\beta) + a)}} e^{-jkR} \quad (13)$$

mit

$$R = \sqrt{(r-a)^2 + z^2} \quad R' = \sqrt{(r+a)^2 + z^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{r-a}{z}\right) \quad \beta = \arctan\left(\frac{r+a}{z}\right) \quad (14) \\ \xi_s = k \sin(\alpha) \quad \xi'_s = k \sin(\beta)$$

Die Ergebnisse der Implementierung sind in Abbildung 1 (links) dargestellt. Rechts ist zum Vergleich das Feld mittels Punktquellensynthese berechnet.



**Abbildung 1:** Vergleich der Schallfelder mit Anwendung der Sattelpunktmethode (links) und der Punktquellensynthese (rechts)

Wie deutlich zu erkennen ist, weichen die Schallfelder stark voneinander ab. Da die Punktquellensynthese bereits seit Jahrzehnten qualifiziert ist, ist davon auszugehen, dass die getätigte Näherung von für die Ringquelle nicht gültig ist. Daher soll hier ein alternativer Ansatz vorgestellt werden:

### Ansatz mittels transienter Grenn'scher Funktionen von Punktquellen

Die genäherten harmonische Green'sche Funktion für eine Punktquelle auf einer Grenzfläche lässt sich mittels:

$$G = \frac{S(\phi)}{2\pi R} e^{jkR} \quad (15)$$

darstellen. Dabei ist wiederum  $R$  der Betrag des Vektors zwischen Quell und Beobachtungspunkt und  $S$  die Richtcharakteristik, die sich aus den Randbedingungen ergibt, mit  $\phi$  dem Winkel zwischen  $R$  und der  $z$ -Achse. Legt man die Quelle an den Punkt  $Q = [a\cos\alpha, a\sin\alpha, 0]$ , erhält man für den Schalldruck an einem Beobachtungspunkt  $P = [x, 0, z]$

$$p(x, z) = \frac{p_0 S(\phi)}{2\pi \sqrt{(x^2 - 2x a \cos(\alpha) + a^2 + z^2)}} \cdot e^{jk\sqrt{(x^2 - 2x a \cos(\alpha) + a^2 + z^2)}} \quad (16)$$

Um das Feld eines Rings mit Radius  $a$  zu berechnen, muss über den Winkel  $\alpha$  integriert werden. Jedoch ist das Integral in dieser Form nicht lösbar. Transformiert man

den Ausdruck jedoch zurück in den Zeitbereich erhält man:

$$p_{Ring} = \int_0^\pi \frac{ap_0 S(\phi)}{\pi \sqrt{(x^2 + a^2 + z^2 - 2x a \cos(\alpha))}} \cdot \delta\left(t - \frac{\sqrt{(x^2 + a^2 + z^2 - 2x a \cos(\alpha))}}{c}\right) d\alpha \quad (17)$$

Dieses Integral lässt sich, unter Ausnutzung der Eigenschaften der  $\delta$ -Funktion, lösen. Man substituiert

$$t' = \frac{\sqrt{(x^2 - 2x a \cos(\alpha) + a^2 + z^2)}}{c} \quad (18)$$

Unter Verwendung der Sprungfunktion  $H(t)$  lautet die Impulsantwort also

$$p(x, z) = \frac{2ap_0 S(\arccos(\frac{z}{ct})) (H(t - t_1) - H(t - t_2))}{\pi \sqrt{4x^2 a^2 - (x^2 + a^2 + z^2 - c^2 t^2)^2}} \quad (19)$$

,mit  $x > 0$ . Die Integrationsgrenzen lassen sich direkt mit

$$t_1 = \frac{\sqrt{(x^2 - 2xa + a^2)}}{c} \quad t_2 = \frac{\sqrt{(x^2 + 2xa + a^2)}}{c} \quad (20)$$

bestimmen. Für  $x=0$  gilt:

$$p(0, z) = \frac{p_0 S(\arccos(\frac{z}{ct})) \delta(t - \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{c})}{\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \quad (21)$$

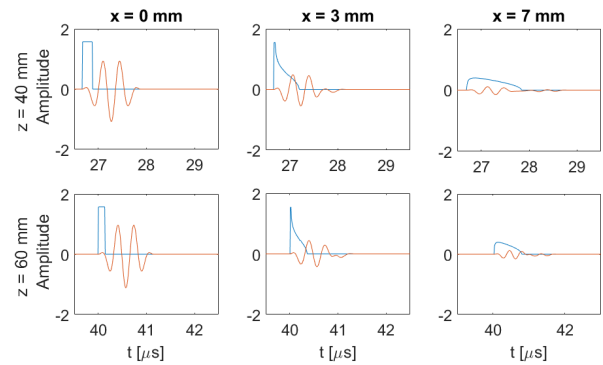
Somit lässt sich die vollständige Impulsantwort bei Ringförmiger Anregung berechnen.

## Ergebnisse

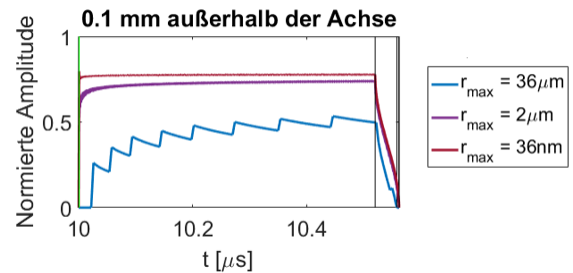
Zum Vergleich wurde zunächst die Impulsantwort eines Kolbenschwingers berechnet und mit den Ergebnissen aus [4] verglichen. Dabei ist zu beachten, dass hier zunächst nur der Longitudinalwellenanteil betrachtet wurde und außerdem aufgrund der genutzten Näherung für die Punktquelle, die Wellenanteile, die von Oberflächenwellen abgestrahlt werden, vernachlässigt werden. Die berechneten Signale für einen Kolbenschwinger mit einem Radius von  $5 \text{ mm}$  und sind in verschiedenen Abständen auf und außerhalb der akustischen Achse in Blau dargestellt. In Rot sieht man die Signale für die Faltung mit einem Signal bei  $3 \text{ MHz}$  Mittenfrequenz bei 3 Perioden Signallänge.

Auf der Achse erhält man das zu erwartende Rechteck, für  $r < a$  ein deutlich kürzeres Rechteck mit danach abklingender Flanke und außerhalb des Kolbens Signale mit deutlich geringerer Amplitude.

Zur Betrachtung der notwendigen Ringdichte wurde der Kolben mit Ringen in unterschiedlichen Abstand belegt. Einige Beispiele sind in Abbildung dargestellt. Es zeigt sich, dass eine Ringdichte  $< 1 \mu\text{m}$  erforderlich ist.

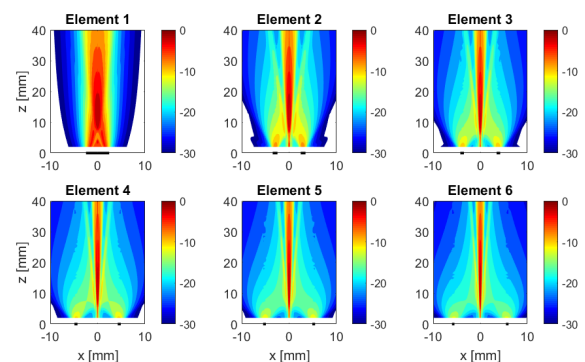


**Abbildung 2:** Mit den abgeleiteten Green'schen Funktionen berechnete Signale eines Kolbenschwingers in verschiedenen Tiefen auf und neben der akustischen Achse



**Abbildung 3:** Vergleich der berechneten Signalen bei unterschiedlichen Belegdichten der Ringe

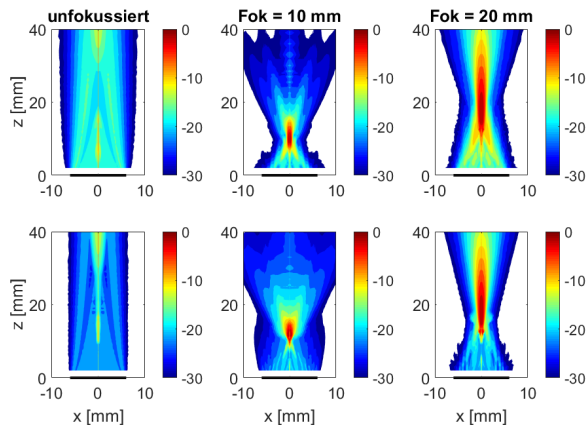
Mit diesem Verfahren lassen sich auch sehr schnell und effektiv die Schallfelder von Annular Arrays berechnen. Abbildung 4 dabei die Maximale Amplitude der des von den Einzelelementen eines Arrays erzeugten Schalldrucks. Das Array besteht aus 6 Elementen gleicher Fläche, wobei der Außendurchmesser  $12 \text{ mm}$  beträgt. Die Elemente sind als dicke Striche auf der  $x$ -Achse angedeutet.



**Abbildung 4:** Schallfeld mit der maximalen Signalamplitude für die Elemente eines Annular-Arrays aus 6 Ringen gleicher Fläche, Außenradius =  $6 \text{ mm}$ , keine Zwischenräume, Mittenfrequenz =  $3 \text{ MHz}$

Ebenso lässt sich die Schalldruckverteilung bei Fokussierung berechnen. Abbildung 5 zeigt die unfokussierten Felder (links) sowie die Felder für Fokussierung auf  $10 \text{ mm}$  (mitte) und  $20 \text{ mm}$  rechts. Dies wurde für die gleiche Arraygeometrie für Anregung mit  $2 \text{ MHz}$  (oben) und

4 MHz (unten) getan. Man erkennt, dass die Fokussierung auf 10 mm mit dem 4 MHz Array nicht möglich wäre, da bei diesem der natürliche Fokus der Einzelemente bereits bei 15 mm liegt.



**Abbildung 5:** Fokussierung mit dem Annular-Array in verschiedene Tiefen - Links: unfokussiert; Mitte: Fokussierung auf 10 mm; Rechts: Fokussierung auf 20 mm, bei einer Mittelfrequenz von 2 MHz oben und 4 MHz unten

## Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde erstmals eine genäherte Grenn'sche Funktion bei ringförmiger Anregung abgeleitet. Obwohl sie die von Oberflächenwellen abgestrahlten Wellenanteile vernachlässigt, sagt sie die wesentlichen Signalanteile genau voraus. Als weiterführende Arbeiten sind die Optimierung der Belegung der Grenzfläche für minimalen Fehler bei minimaler Rechenzeit und die Erweiterung des Algorithmus für mehrschichtige Probleme zu nennen.

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung der Arbeiten im Rahmen des Projekts KU 1075/18-1

## Literatur

- [1] Kümmitz, S., Wolf, M., Kühnicke, E.: Simultane Bestimmung von Dicken und Schallgeschwindigkeiten geschichteter Strukturen. *tm-Technisches Messen*, 82-3 (2015), 127-134
- [2] Wolf, M. and Kühnicke E.: Non-invasive and Locally Resolved Measurement of Sound Velocity by Ultrasound. *Sensors and Transducers* 184-1 (2015), 53-61
- [3] Kühnicke, E.: Elastische Wellen in geschichteten Festkörpersystemen: Modellierungen mit Hilfe von Integraltransformationmethoden; Simulationsrechnungen für Ultraschallanwendungen. TIMUG, Dresden, 2000.
- [4] Bresse, L.F. and Hutchins, D. A.: Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source. *The Journal of the Acoustical Society of America* 86-2 (1989), 810-817