

Das PACMAN-Modell

Harald Ziegelwanger¹ und Paul Reiter^{1,2}

¹AIT Austrian Institute of Technology, Mobility Department, Transportation Infrastructure Technologies,
Giefinggasse 2, 1210 Wien, Austria, Email: harald.ziegelwanger@ait.ac.at

²TU Wien, Institut für Angewandte Physik, Wiedner Hauptstr. 8-10/134, 1040 Wien, Austria

Einleitung

Numerische Verfahren wie die Randelementmethode (engl. boundary element method, BEM) oder die Finite Elemente Methode sind weit verbreitet in der Akustik. Auf der Internetplattform¹ der Benchmark-Initiative des Technical Committee for Computational Acoustics der European Acoustics Association [1] können sowohl Benchmark-Fälle als auch Lösungen zu bestehenden Fällen eingereicht und veröffentlicht werden. Während für die 3D BEM bereits Benchmark-Fälle veröffentlicht wurden, wie zum Beispiel das "Cat's Eye"-Modell [2] mit zugehöriger analytischer Lösung oder der Radiatierer, so wurden bis jetzt keine Benchmark-Fälle für die 2D BEM oder die quasi-periodische BEM eingereicht. Deshalb wird in diesem Beitrag das "PACMAN"-Modell vorgestellt. Das PACMAN-Modell ist das 2D-Pendant zum "Cat's Eye"-Modell und wird durch einen Kreis mit fehlendem Kreissektor beschrieben (Abb. 1). Es wird analog zum "Cat's Eye"-Modell eine analytische Lösung für den einfachen Fall einer symmetrischen Abstrahlung von Oberflächenschwingungen präsentiert und mit dem anti-symmetrischen Teil ergänzt um auch die Reflexion von beliebig einfallenden Schallwellen berechnen zu können. Abschließend werden die Abstrahlungs- und Streuungsmuster für verschiedene Konfigurationen gezeigt.

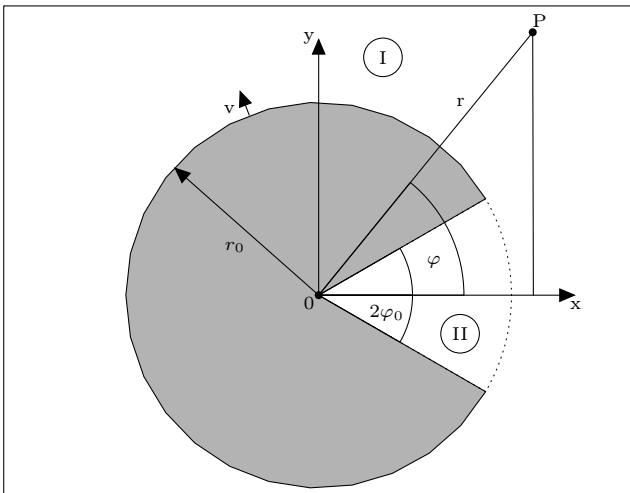


Abbildung 1: Das PACMAN-Modell besteht aus einem Kreis mit Radius r_0 mit einem ausgeschnittenen Kreissektor mit Winkelbreite $2\varphi_0$.

Schallfeldformulierung

Die Formulierung des Schallfelds wird in Polarkoordinaten r, φ angesetzt, wobei $\varphi = 0$ im Zentrum der PACMAN-Öffnung gewählt wird. Der Schalldruck p wird über die 2D Helmholtz-Gleichung beschrieben [3]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 p(r, \varphi) = 0, \quad (1)$$

wobei $k = \frac{\omega}{c_0}$ die Wellenzahl, ω die Kreisfrequenz und c_0 die Schallgeschwindigkeit sind. $\mathbf{v} = \frac{i}{kZ_0} \text{grad} p$ ist die Schallschnelle, Z_0 die Schallkennimpedanz und ρ_0 die Dichte des Mediums. In Polarkoordinaten lässt sich die Helmholtzgleichung durch einen Produktansatz für $p(r, \varphi)$ mit einem radialen Teil $R(kr)$ und einen winkelabhängigen Teil $\Phi(\varphi)$ lösen:

$$p(r, \varphi) = R(kr)\Phi(\varphi) \quad (2)$$

mit

$$R(kr) = A_\nu \mathcal{R}_\nu^{(1)}(kr) + B_\nu \mathcal{R}_\nu^{(2)}(kr)$$

und

$$\Phi(\varphi) = \alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi).$$

In der äußeren Zone (I) muss die Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung und Kontinuität des Schalldrucks erfüllt sein. Daraus folgt eine Periodizität des Schallfeldes in φ und $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$ [4]. Der Schalldruck wird als Überlagerung von anti-symmetrischen und symmetrischen Moden dargestellt:

$$p^{(I)}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^A H_n^{(2)}(kr) \sin(n\varphi) + a_n^S H_n^{(2)}(kr) \cos(n\varphi), \quad (3)$$

wobei a_n^A und a_n^S die Modenamplituden für den anti-symmetrischen und symmetrischen Schallfeldanteil in (I) und $H_n^{(2)}(kr)$ die Hankelfunktion zweiter Art darstellen. Das Schallfeld in der inneren Zone (II) muss die Randbedingung von schallharten Kanten im fehlenden Kreissektor erfüllen. Daraus ergeben sich unterschiedliche Modenindizes (mit $N = \pi/\varphi_0$) für den anti-symmetrischen und symmetrischen Anteil des Schallfeldes:

$$p^{(II)}(r, \varphi) = \sum_{\eta=0}^{\infty} b_{(\eta+\frac{1}{2})N}^A J_{(\eta+\frac{1}{2})N}(kr) \sin\left(\left(\eta+\frac{1}{2}\right)N\varphi\right) + b_{\eta N}^S J_{\eta N}(kr) \cos(\eta N\varphi), \quad (4)$$

wobei $b_{(\eta+\frac{1}{2})N}^A$ und $b_{\eta N}^S$ die Modenamplituden für den anti-symmetrischen und symmetrischen Schallfeldanteil in (II) und $J_\nu(kr)$ die Besselfunktion darstellen.

¹<http://eaa-bench.mec.tuwien.ac.at>

PAC-MAN Gleichungen

Durch Gleichsetzen der Schalldrücke für das einfallende und gestreute Schallfeld in (I) und das gesamte Schallfeld in (II) und Erfüllung der schallharten Randbedingungen, ergibt sich das gekoppelte Schallfeld von (I) und (II) für die PAC-MAN Geometrie zu:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\delta_{n,i}}{2} H_i'^{(2)}(kr_0) - \frac{\varphi_0}{\pi} H_n^{(2)}(kr_0) \right. \\
 & \left. \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{2J'_{(\eta+\frac{1}{2})N}(kr_0)}{J_{(\eta+\frac{1}{2})N}(kr_0)} I_{n,(\eta+\frac{1}{2})N}^{\sin} I_{i,(\eta+\frac{1}{2})N}^{\sin} \right\} a_n^A = \\
 & -i \frac{1}{2} Z_0 V_i^{\mathcal{A},vib} + \frac{\varphi_0}{\pi} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left\{ \frac{2J'_{(\eta+\frac{1}{2})N}(kr_0)}{J_{(\eta+\frac{1}{2})N}(kr_0)} I_{i,(\eta+\frac{1}{2})N}^{\sin} \right\} \\
 & \left. \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \left[J_{n^*}(kr_0) H_{n^*}^{(2)}(kr^*) \sin(n^* \varphi^*) I_{n^*,(\eta+\frac{1}{2})N}^{\sin} \right] \right\} \\
 & - J_i'(kr_0) H_i^{(2)}(kr^*) \sin(i\varphi_s) + i \frac{\varphi_0}{\pi} \sum_{n^*=0}^{\infty} Z_0 V_{n^*}^{\mathcal{A},vib} I_{i,n^*}^{\sin}
 \end{aligned} \quad (5)$$

für den anti-symmetrischen Anteil und zu

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\delta_{n,i}}{\delta_i} H_i'^{(2)}(kr_0) - \frac{\varphi_0}{\pi} H_n^{(2)}(kr_0) \right. \\
 & \left. \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\delta_{\eta N} J'_{\eta N}(kr_0)}{J_{\eta N}(kr_0)} I_{n,\eta N}^{\cos} I_{i,\eta N}^{\cos} \right\} a_n^S = \\
 & -i \frac{1}{\delta_i} Z_0 V_i^{\mathcal{S},vib} + \frac{\varphi_0}{\pi} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left\{ \frac{\delta_{\eta N} J'_{\eta N}(kr_0)}{J_{\eta N}(kr_0)} I_{i,\eta N}^{\cos} \right\} \\
 & \left. \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \left[J_{n^*}(kr_0) H_{n^*}^{(2)}(kr^*) \cos(n^* \varphi^*) I_{n^*,\eta N}^{\cos} \right] \right\} \\
 & - J_i'(kr_0) H_i^{(2)}(kr^*) \cos(i\varphi^*) + i \frac{\varphi_0}{\pi} \sum_{n^*=0}^{\infty} Z_0 V_{n^*}^{\mathcal{S},vib} I_{i,n^*}^{\cos}
 \end{aligned} \quad (6)$$

für den symmetrischen Anteil des Schallfeldes. In Gl. 5 und 6 sind V_i^{vib} Modenamplituden der Oberflächenschwingungen, δ_i die Stoßfunktion, $\delta_{n,i}$ die Sprungfunktion, ' die Ableitung nach dem Argument und $I_{i,n}^{\cos}$, $I_{i,n}^{\sin}$ Kopplungsintegrale von (I) und (II) (nähere Details in [5]).

Beispiele

In Abb. 2 bis 4 sind Ergebnisse (normierter Schalldruck ausgewertet bei $r = 2$ m) für die Abstrahlung von Oberflächenschwingungen und für die Streuung von einfallenden Schallwellen von Linienschallquellen dargestellt. In allen Beispielen betrug $r_0 = 1$ m und $\varphi_0 = \pi/N$. Summen in Gl. 5 und 6 wurden bei Ordnung 100 abgebrochen.

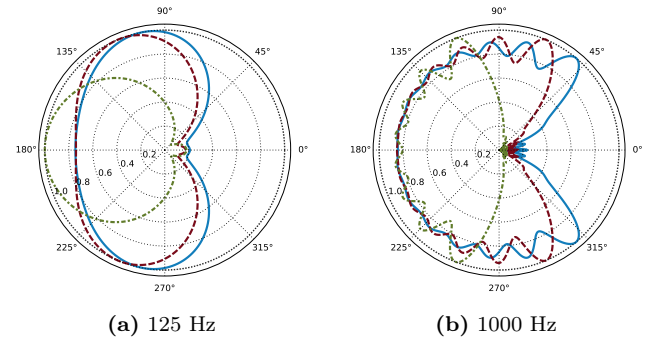


Abbildung 2: Schallabstrahlung der äußeren PAC-MAN-Oberfläche für $N = 6$ (—), $N = 4$ (---) und $N = 2$ (-·-·-) und für einen kompletten Zylinder (.....).

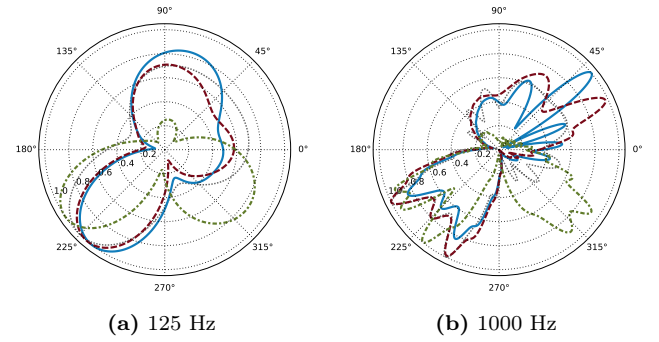


Abbildung 3: Streuung der einfallenden Schallwelle einer Linienschallquelle ($r^* = 4$, $\varphi^* = \pi/4$). Andere Details wie in Abb. 2.

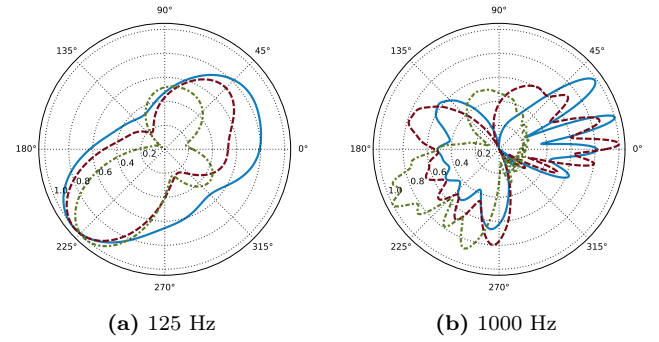


Abbildung 4: Streuung der einfallenden Schallwelle einer Linienschallquelle ($r^* = 1.01$, $\varphi^* = \pi/N$). Andere Details wie in Abb. 2.

Literatur

- [1] M. Hornikx, M. Kaltenbacher, S. Marburg, A Platform for Benchmark Cases in Computational Acoustics, Acta Acustica united with Acustica 101 (4) (2015) 811–820. doi:doi:10.3813/AAA.918875.
- [2] F. P. Mechel, The Cat's Eye Model, Acta Acustica united with Acustica 91 (4) (2005) 653–660.
- [3] L. L. Beranek, T. J. Mellow, Acoustics: Sound Fields and Transducers, Academic Press, Amsterdam, 2012.
- [4] E. G. Williams, Fourier Acoustics, Academic Press, London, 1999.
- [5] H. Ziegelwanger, P. Reiter, The PAC-MAN Model: Benchmark Case for Linear Acoustics in Computational Physics, submitted to the Journal of Computational Physics.