

Numerische Stabilität einer Ray Tracing Simulation für atmosphärische Schallfelder

Philipp Schäfer, Jens Mecking, Jonas Stienen, Michael Vorländer

Institut für Technische Akustik, 52074 Aachen, Deutschland, Email: philipp.marco.schaefer@rwth-aachen.de

Einleitung

Dieser Beitrag befasst sich mit der numerischen Genauigkeit von Ray Tracing Simulationen der Schallausbreitung in der Erdatmosphäre. Im Gegensatz zu anderen Anwendungen kann das Medium dabei weder als homogen noch statisch angenommen werden. In der Regel liegt eine Mediumsbewegung in Form von Wind oder Turbulenzen vor. Temperatur und Windgeschwindigkeit variieren über den Ort - besonders mit der Höhe - was eine Variation der Schallgeschwindigkeit und damit auch Brechung zu Folge hat [1, 2] (Abb. 1). Aufgrund dieser Effekte ist das Ray Tracing von Schall in der Atmosphäre ein komplexes und rechenaufwendiges Verfahren. Dennoch ist eine schnelle und genaue Berechnung der Strahlen gewünscht. Daher muss ein Ray Tracing Algorithmus für das vorliegende Problem möglichst effizient arbeiten.

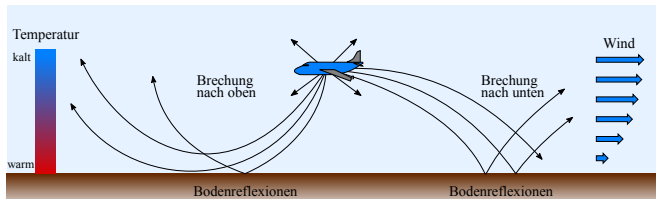


Abbildung 1: Schematische Darstellung von Schallausbreitung in der Erdatmosphäre. Schall wird durch die Einwirkung von Temperatur- und Windgradient gebrochen. Zusätzlich findet am Boden eine Reflexion des Schalls statt.

Ziel dieser Simulation ist die Schätzung des Schallübertragungsverhaltens von einer Quell- zu einer Empfängerposition anhand der Strahlen i , die beide Positionen verbinden und Eigenrays genannt werden:

$$\frac{p_R}{p_S} = \sum_i^{N_{\text{Eigenrays}}} A_{\text{air},i} \cdot A_{\text{spread},i} \cdot \underline{R}_i \cdot e^{j\omega\tau_i} \quad (1)$$

In die Übertragungsfunktion fließen für jeden dieser Eigenrays die Luftdämpfung A_{air} , die geometrische Ausbreitungsdämpfung A_{spread} , der komplexwertige Reflexionsfaktor \underline{R} und die Laufzeit τ ein. Die Berechnung eines Strahls erfolgt durch numerische Integration von Differentialgleichungen [1, 3]. Dabei werden atmosphärische Größen und Strahlparameter stückweise als konstant angenommen. Aufgrund von lokalen Unstetigkeiten oder starken Fluktuationen von atmosphärischen Größen können bei der Berechnung numerische Ungenauigkeiten entstehen, die zu großen geometrischen Fehlern im Verlauf der Strahlen führen. Für die verwendeten Modelle konnte deren Ursache vor allem auf die numerische Integration des Windgradienten zurückgeführt werden. Im Falle solcher Ungenauigkeiten muss die Integrations-schrittweite fein genug eingestellt werden, um die Fehler klein zu halten, was gleichzeitig zu einer erhöhten

Rechenlaufzeit führt. An numerisch unkritischen Stellen hingegen kann die Schrittweite ohne nennenswerte Genauigkeitseinbußen weiter eingestellt werden. Daher wird in diesem Beitrag ein adaptives Verfahren für die Integrations-schrittweite vorgestellt, welches durch einstellbare Parameter einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und geringer Rechenlaufzeit bildet.

Methoden und Modelle

Atmosphäre

Eine häufig getroffene Annahme für die Atmosphäre ist, dass alle ortsabhängigen Größen wie Wind und Temperatur und in der Konsequenz auch die Schallgeschwindigkeit nur von der Höhe z abhängig sind. Desweiteren ist es sinnvoll, die z -Komponente des Windvektors \mathbf{v} zu vernachlässigen, also eine rein horizontale Windrichtung anzunehmen [1, 2]. Turbulenzen werden komplett vernachlässigt. Dies führt zu einem Modell mit horizontalen Schichten gleicher atmosphärischer Größen.

Boden und Reflexionen

Als Boden wird die horizontale Ebene $z = 0$ m verwendet und somit dessen Topologie vernachlässigt. Strahlen, die diese Ebene treffen, werden spiegelnd reflektiert. Andere Reflexionsflächen sind nicht vorhanden.

Temperaturmodell und Schallgeschwindigkeit

Für die Temperatur wird die lineare Gleichung

$$T(z) = 288.15 \text{ K} - 0.0065 \frac{\text{K}}{\text{m}} \cdot z \quad [\text{K}] \quad (2)$$

des International Standard Atmosphere (ISA) Modells verwendet [4], welches für eine Höhe zwischen Meeresspiegel ($z = 0$ m) und einer Höhe von $z = 12000$ m definiert ist. Die Schallgeschwindigkeit c wird anhand

$$c(z) = \sqrt{\gamma R \cdot T(z)} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

bestimmt. Für den Isentropenindex γ und die molare Gaskonstante R wird dabei der Wert $\gamma R = 402.8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$ verwendet [2].

Windmodell

Für den Wind \mathbf{v} wird eine konstante Richtung angenommen. Die Windgeschwindigkeit v wird nach einem logarithmischen Windprofil berechnet. Demnach ist es unterhalb der sogenannten Rauigkeitshöhe z_0 [m] windstill. Darüber hat die mittlere Windgeschwindigkeit eine logarithmische Gestalt [5]:

$$v(z) = \begin{cases} 0 & , z < z_0 \\ v_0 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & , z \geq z_0 \end{cases} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (4)$$

Der Vorfaktor $v_0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ wird als konstant angenommen und kann je nach Wetterlage variieren. Eine Ableitung der Windgeschwindigkeit nach der Höhe ergibt:

$$\frac{d}{dz}v(z) = \begin{cases} 0 & , z < z_0 \\ \frac{v_0}{z} & , z \geq z_0 \end{cases} \quad \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \quad (5)$$

Beide Verläufe sind qualitativ in Abbildung 2 dargestellt.

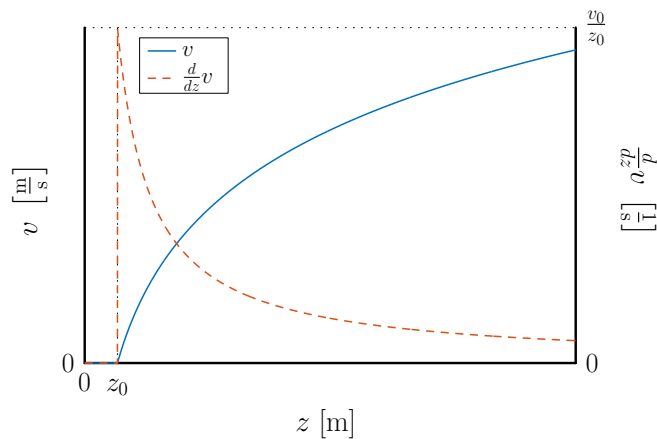


Abbildung 2: Qualitativer Verlauf der Windgeschwindigkeit und deren Ableitung nach der Höhe z für das logarithmische Windmodell. Deutlich zu erkennen ist die Unstetigkeit bei $z = z_0$ und die große Änderungsrate in der Umgebung um diese Stelle. Beide können zu numerischen Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Strahlen führen.

Ausbreitung der Strahlen

Die Berechnung der Strahlen für ein inhomogenes bewegtes Medium erfolgt nach Lindsay [3]. Hierbei wird der Strahl durch den zeitabhängigen Ortsvektor \mathbf{r} beschrieben. Mit den zuvor getroffenen Annahmen, lassen sich die Strahl-Gleichungen in effizienter Form aufstellen. Für die Geschwindigkeit eines Strahls ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{r}} = c \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (6)$$

Dabei sind c und \mathbf{v} abhängig vom aktuellen Ort des Strahls \mathbf{r} , genauer gesagt von dessen z -Komponente. Auch die Wellenfrontnormale \mathbf{n} ist aufgrund der Brechung zeitabhängig. Eine wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die effektive Schallgeschwindigkeit [1]:

$$c_{\text{eff}} = c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (7)$$

Sie setzt sich zusammen aus der Schallgeschwindigkeit c und dem Anteil der Windgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Ihre Ableitung nach der Höhe ist maßgeblich für die Änderungsrate der Wellenfrontnormalen verantwortlich:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{dz}c_{\text{eff}} \cdot [n_z \cdot \mathbf{n} - \mathbf{e}_z] \quad \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \quad (8)$$

Da eine analytische Berechnung des Strahls in der Regel nicht möglich ist, erfolgt eine Näherung durch numeri-

sche Integration mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens (RK4) [1]. Hierbei wird die Integrationsvariable, also die Zeit, diskretisiert. Gleichungen 6 und 8 werden dann für jeden diskreten Zeitpunkt ausgewertet.

Untersuchung zur numerischen Genauigkeit

Variation der Integrationsschrittweite

Zur Untersuchung der numerischen Genauigkeit wurden Strahlen unter verschiedenen Einstellungen, wie Windparameter und initiale Ausbreitungsrichtung, betrachtet. Dabei wurde jeder Strahl mehrfach unter Variation der Integrationsschrittweite Δt berechnet. Hierbei zeigten sich große Unterschiede im Verlauf solcher Strahlen, die von einer Quelle knapp oberhalb der windstillen Zone ($z > z_0$) ausgehen und etwas unterhalb der horizontalen Windrichtung zum Boden verfolgt werden (*grazing incidence*). In diesem Fall ist der Einfluss der Windgeschwindigkeit auf die Brechung besonders groß, da \mathbf{n} und \mathbf{v} quasi kollinear verlaufen (Gl. 7 und 8). Die Divergenz tritt dabei erst in Bodennähe, nämlich um $z = z_0$, auf. In diesem Bereich weist $\frac{d}{dz}v$ eine Unstetigkeit und eine sehr hohe Änderungsrate auf (Abb. 2). Es liegt daher nahe, dass die numerische Integration von Gleichung 8 dort besonders ungenau ist. Dementsprechend ist eine hohe zeitliche Auflösung notwendig, damit die Brechung in möglichst guter Näherung berechnet wird.

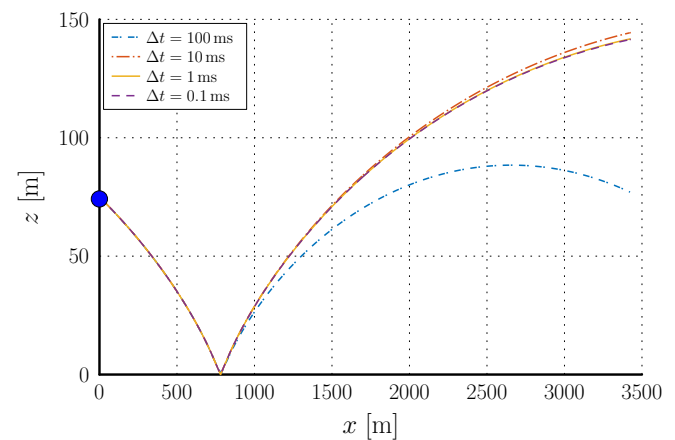


Abbildung 3: Strahlen mit gleicher initialer Richtung und unterschiedlicher Integrationsschrittweite Δt bei folgenden Einstellungen: Quelle in 75 m über dem Ursprung, Wind in x -Richtung, initiale Elevation und Azimuth der Strahlen $(\theta_0, \phi_0) = (93.75^\circ, 0^\circ)$, $v_0 = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $z_0 = 7.5 \text{ m}$. Aufgrund numerischer Integrationsfehler divergieren Strahlen mit geringer Zeitauflösung von denen mit hoher Zeitauflösung. Ab einer Feinheit von $\Delta t = 1 \text{ ms}$ ist jedoch eine Konvergenz der Strahlen zu erkennen.

Als Beispiel für solch ein Szenario werden die Strahlen in Abbildung 3 betrachtet. Diese werden von einer Quelle 75 m über dem Koordinatenursprung mit initialer Elevation und Azimuth $(\theta_0, \phi_0) = (93.75^\circ, 0^\circ)$ geschossen (Hinweis: Ein Vektor mit 0° Elevation zeigt vertikal nach oben). Die Parameter für den Wind, der in x -Richtung verläuft, sind zu $v_0 = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $z_0 = 7.5 \text{ m}$ gewählt.

Vor allem für $\Delta t = 100$ ms ist eine starke Divergenz von den anderen Strahlen zu erkennen. Mit feiner werdender Integrationsschrittweite sinkt der numerische Fehler. Ab einer Auflösung von $\Delta t = 1$ ms ist dann eine Konvergenz der Strahlen erkennbar. Da diese jedoch bis zum Eintritt in den kritischen Bereich ($z \approx z_0$) nicht divergieren, ist es naheliegend, dass eine geringere zeitliche Auflösung in diesem Bereich keine nennenswerten Auswirkungen auf die Genauigkeit des Strahlverlaufs hat, jedoch die Rechenzeit deutlich verringert.

Beurteilung der Rechengenauigkeit

Um abzuschätzen, ob der numerische Fehler beim aktuellen Integrationsschritt zu groß ist, wird ein Unsicherheitsmaß bezüglich der Brechung - verursacht durch den Windgradienten - eingeführt. Da in den verwendeten Modellen die numerische Instabilität anscheinend aus der Unstetigkeit bzw. der hohen Änderungsrate von $\mathbf{n} \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{v}$ resultiert, wird das Integral

$$I_v = \mathbf{n}(z_1) \int_{z_1}^{z_2} \frac{d}{dz} \mathbf{v}(z) dz \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (9)$$

betrachtet. Der Integrand dieser Gleichung steckt auch in der Brechungsformel (Gl. 8) und zwar in der Ableitung von c_{eff} (Gl. 7). Demnach wird ein großer numerischer Fehler bei dieser Integration auch zu einem großen Fehler bei der Berechnung der Wellenfrontnormalen führen. Aus diesem Grund vergleicht das Unsicherheitsmaß u_v (Gl. 12) die analytische Lösung

$$I_{v,a} = [\mathbf{v}(z_2) - \mathbf{v}(z_1)] \cdot \mathbf{n}(z_1) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (10)$$

mit der numerischen Lösung

$$I_{v,num} = \frac{d}{dz} \mathbf{v}(z_1) \cdot [z_2 - z_1] \cdot \mathbf{n}(z_1) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (11)$$

von Gleichung 9. Es wird aus dem absoluten Fehler beider Ergebnisse berechnet:

$$u_v = |I_{v,a} - I_{v,num}| \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (12)$$

Je höher dieser Wert, desto ungenauer ist die Berechnung der Brechung (Gl. 8) und dementsprechend auch der Verlauf des berechneten Strahls.

Abbildung 4 zeigt das Unsicherheitsmaß u_v für die zuvor berechneten Strahlen aus Abbildung 3 in einem Zeitausschnitt um die Bodenreflexion. Es ist zu erkennen, dass die kritische Stelle des Windgradienten (Abb. 2) um $z = z_0$ zweimal durchlaufen wird, jeweils vor und nach der Reflexion. Wie erwartet zeigt das Unsicherheitsmaß höhere Werte bei größerer Auflösung der Zeit. Da die betrachteten Strahlen ab einer Schrittweite von $\Delta t = 1$ ms konvergieren, wird der Strahl dieses Grenzfalles genauer betrachtet. Dessen Unsicherheitsmaß erreicht einen maximalen Wert von ca. $0.011 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Daran orientiert wird der Schwellwert $u_{v,\text{thresh}} = 0.015 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ definiert. Wird dieser bei einem Integrationsschritt überschritten, ist die Berechnung als ungenau einzustufen.

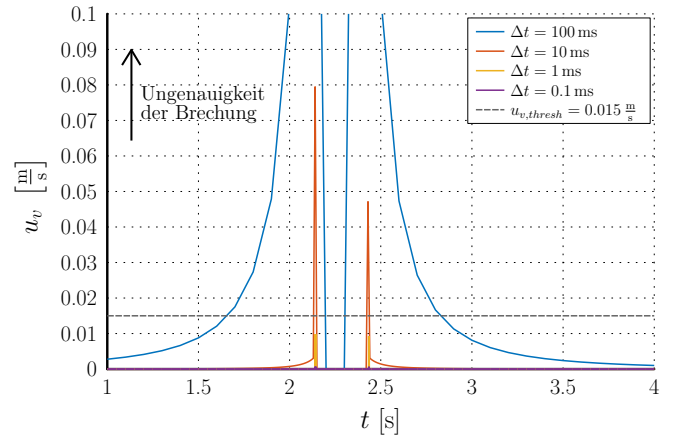


Abbildung 4: Zeitausschnitt des Unsicherheitsmaß u_v für die Strahlen aus Abbildung 3 um den Zeitpunkt der Bodenreflexion. Es ist zu sehen, dass der kritische Bereich des Gradienten der Windgeschwindigkeit (Abb. 2) um $z = z_0$ zweimal durchlaufen wird, jeweils vor und nach der Reflexion. An diesen Stellen besitzt u_v Maxima. Anhand des ersten konvergierten Strahls mit $\Delta t = 1$ ms wird der Schwellwert $u_{v,\text{thresh}}$, ab dem ein Integrationsschritt als ungenau eingestuft wird, bestimmt.

Adaptive Integration

Um einen Kompromiss zwischen Rechenzeit und numerischer Genauigkeit zu finden, wird ein adaptives Verfahren vorgestellt. Hierbei ist die Integrationsschrittweite Δt nicht konstant, sondern wird an numerisch kritischen Stellen feiner eingestellt. So kann die gewünschte Genauigkeit erzielt werden ohne die Rechenzeit an unkritischen Stellen zu erhöhen.

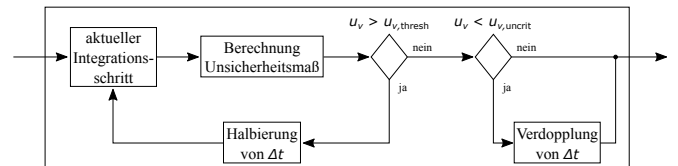


Abbildung 5: Blockdiagramm der Adaption von Integrationschrittweite Δt . Der aktuelle Integrationschritt wird so lange wiederholt, bis das Unsicherheitsmaß u_v den Schwellwert $u_{v,\text{thresh}}$ unterschreitet. Dabei wird die Δt jeweils halbiert. Unterschreitet u_v außerdem den Wert $u_{v,\text{uncrit}}$, wird Δt verdoppelt. Zur Vereinfachung wurde hier die Begrenzung von Δt (Gl. 13) vernachlässigt.

Nach jedem Integrationschritt wird das zuvor eingeführte Unsicherheitsmaß überprüft. Wird der Wert $u_{v,\text{thresh}}$ überschritten, wird die Integrationsschrittweite Δt halbiert und die Integration wiederholt. Bei Unterschreitung des Wertes $u_{v,\text{uncrit}} = 0.005 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wird die Integrationsschrittweite wieder verdoppelt. Dieser Prozess ist in Abbildung 5 in Form eines Blockdiagramms dargestellt. Dabei ist die Schrittweite durch einen initialen Wert Δt_0 und einen maximalen Faktor 2^m ($m \in \mathbb{N}$) limitiert:

$$\Delta t \in \left[\frac{\Delta t_0}{2^m}, \Delta t_0 \right] \quad [\text{s}] \quad (13)$$

Eine Verdopplung von Δt erfolgt außerdem nur, wenn es dadurch noch möglich ist im Raster von Δt_0 zu bleiben.

Zwischenwerte für \mathbf{r} , außerhalb des Rasters werden nicht gespeichert. Somit ist das Ergebnis trotz Adaption ein Array aus kartesischen Vektoren mit konstanter zeitlicher Auflösung Δt_0 .

Beide Schwellwerte - $u_{v,\text{thresh}}$ und $u_{v,\text{uncrit}}$ - beeinflussen die Genauigkeit der berechneten Strahlen. Die hier gewählten Werte sind für die verwendeten Modelle bestimmt. Für andere Modelle oder Anwendungen können diese jedoch abweichen.

Testsystem

Die Implementierung des Ray Tracers erfolgte in MATLAB 2016b. Die Berechnung der Strahlen fanden auf einer Intel(R) Core(TM) i5-6600 CPU mit 4 Kernen bei 3.30 GHz und 16 GB physikalischem Speicher statt. Bei dem verwendeten Betriebssystem handelte es sich um die 64-bit Version von Microsoft Windows 7 Professional mit Service Pack 1 (build 7601).

Performanz

Im Folgenden wird die Leistung des adaptiven Integrationsverfahrens hinsichtlich Genauigkeit und Rechenzeit untersucht. Hierfür wird der gleiche Strahl, berechnet mit dem adaptiven Verfahren und einer initialen Integrations-schrittweite $\Delta t_0 = 100$ ms, mit dem konvergierten Strahl mit $\Delta t = 1$ ms aus Abbildung 3 verglichen. In Abbildung 6 ist zu sehen, dass der Verlauf der Strahlen übereinstimmt. Das adaptive Verfahren erzielt daher bei 100 mal geringerer initialer Auflösung ein Ergebnis mit vergleichbarer Genauigkeit. Die Laufzeiten beider

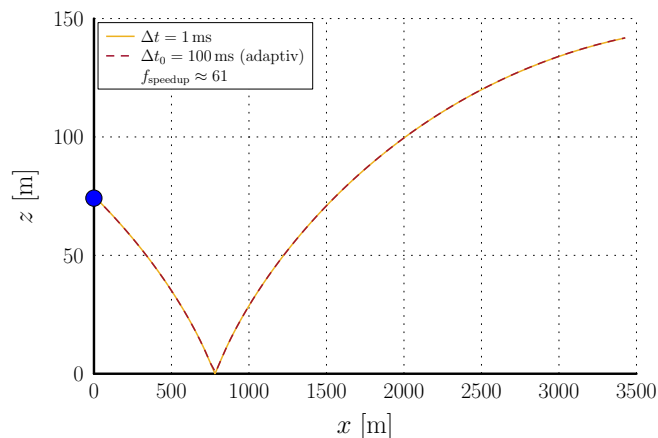


Abbildung 6: Vergleich von herkömmlicher Integration bei zeitlicher Auflösung im Konvergenzbereich mit adaptiver Integration bei großer initialer Schrittweite. Beide Berechnungsarten ergeben identische Strahlen, jedoch ist das adaptive Verfahren deutlich schneller (Faktor zwischen Laufzeiten: $f_{\text{speedup}} \approx 61$).

Berechnungen wurde mit Hilfe der MATLAB-Befehle *tic* und *toc* gemessen. Die Messungen wurden jeweils zehnmal wiederholt. Die Standardabweichung betrug dabei weniger als 1 % des jeweiligen Mittelwerts. Die Beschleunigung wird anhand des Faktors

$$f_{\text{speedup}} = \frac{T_{\text{ref}}}{T_{\text{adaptive}}}, \quad (14)$$

der aus dem Quotienten beider Laufzeiten besteht, gemessen. Für die verglichenen Strahlen beträgt dieser ca. 61 (mit einer maximalen relativen Abweichung von $\frac{1+1\%}{1-1\%} \approx 1.02$). Es kann also von einer erheblichen Beschleunigung ausgegangen werden.

Fazit

Zusammenfassung

Es wurde ein adaptives Verfahren für die Integration von Strahlen in der Atmosphäre, welche als horizontal geschichtetes Medium angenommen wird, vorgestellt. Mit dessen Hilfe wird die Integrations-schrittweite Δt auf eine parametrisch einstellbare Genauigkeit angepasst. Im Vergleich zur herkömmlichen Methode ist dadurch eine erhebliche Beschleunigung bei vergleichbarer Genauigkeit möglich.

Ausblick

Weitere Untersuchungen sind nötig, um den Gewinn durch das adaptive Verfahren genauer einzustufen. Hierfür wird der Algorithmus in C++ implementiert und beide Methoden mittels Benchmarks gemessen. Desweiteren wird das Verfahren für andere Modelle für Temperatur und Windgeschwindigkeit untersucht. In diesem Zusammenhang ist eine Erweiterung des Unsicherheitsmaßes denkbar. Anstatt nur die Integration der Windkomponente in Richtung der Wellenfrontnormalen zu überprüfen (Gl. 9), könnte das Maß hinsichtlich der Integration über die effektive Schallgeschwindigkeit

$$I_{\text{ceff}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{d}{dz} c_{\text{eff}}(z) dz \quad (15)$$

aufgestellt werden. Außerdem wird die Genauigkeit des Strahlenverlaufs im Kontext einer Auralisierung (Gl. 1) untersucht. Dabei ist vor allem interessant, welche Abweichung vom korrekten Verlauf hörbar ist und wie die Schwellwerte des Unsicherheitsmaßes u_v dementsprechend effizient eingestellt werden können.

Literatur

- [1] Ostashev, V. E. and Wilson, D. K.: Acoustics in moving inhomogeneous media. CRC Press, Boca Raton, 2015
- [2] Garcés, M. A., Hansen, R. A. and Lindquist, K. G.: Traveltimes for infrasonic waves propagating in a stratified atmosphere. Geophysical Journal International 135 (1998), 255-263
- [3] Lindsay, R. B.: Mechanical Radiation. McGraw-Hill, New York, 1960
- [4] Sissenwine, N., Dubin, M. and Wexler, H.: U.S. Standard Atmosphere. Journal of Geophysical Research 67 (1962), 3627-3630
- [5] Kraus, H.: Grundlagen der Grenzschicht-Meteorologie: Einführung in die Physik der Atmosphärischen Grenzschicht und in die Mikrometeorologie. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008