Untersuchung ausgewählter Terme in den Gleichungssystemen hybrider „hydrodynamic/acoustic splitting“-Formulierungen

Thorben Schröder, Joscha Piepiorka, Patrick Silkeit und Otto von Estorff
TU Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, E-Mail: mub@tuhh.de

Einleitung

Die „hydrodynamic/acoustic splitting“(HAS)-Ansätze sind eine Klasse von hybriden Verfahren der numerischen Strömungsakustik. Als hervorstechendes Merkmal basieren HAS-Methoden auf einer inkompressiblen Strömungssimulation (CFD). Die akustischen Modellierungsgrößen sind kompressible Störungen. Zeitliche Ableitungen des Druckes sind die primären Quellterme für die Akustik. HAS-Verfahren sind auf niedrige Mach-Zahlen beschränkt und zeigen aufgrund ihrer Variablenauftrennung sehr spezielle Charakteristiken.

Eine Vielzahl von bekannten Methoden basiert auf dem HAS oder lässt sich auf ein sehr eng verwandtes Prinzip zurückführen (z.B. [1] und zweite Variante aus [2]). Im vorliegenden Beitrag werden repräsentativ die „Linearized Perturbed Compressible Equations“ (LPCE, [3]) und eine erweiterte Variante derer untersucht. Es wird dabei der Einfluss sekundärer Terme betrachtet und insbesondere auf die Rolle von Termen eingegangen, die potentiell nicht-akustische Wirbelmoden induzieren können.

Methode und Gleichungsterme

Die LPCE wurden unter Verwendung einer Linearisierung der perturbed compressible equations (PCE) hergeleitet [3]. Beide Verfahren basieren auf der Variablenauftrennung

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}} \qquad \rho = \rho^{\mathrm{ic}} + \rho^{\mathrm{ac}} \quad p = p^{\mathrm{ic}} + p^{\mathrm{ac}}, \tag{1}$$

wobei $(\cdot)^{\mathrm{ic}}$ inkompressible, hydrodynamische Anteile bezeichnet. Die Größen $(\cdot)^{\mathrm{ac}}$ sind kompressible, akustische Schwankungen, die hier später auch als gestörte Größen bezeichnet werden. Die PCE beschreiben, neben den akustischen Größen, auch unerwünschte Wirbelmoden und neigen (wie auch andere Verfahren, die Wirbelmoden zulassen) bei realistischer Akustik-Netzauflösung zu instabiler Entwicklung dieser Wirbelmoden [3]. Daher werden bei den LPCE zur Stabilisierung Terme, die gestörte Wirbelmoden ($\boldsymbol{\omega^{ac}} = \nabla \times \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}$) anregen, fallengelassen. Da Wirbelmoden keine akustischen Störungen sind, ist die Vernachlässigung grundsätzlich begründbar. Terme, die dabei fallengelassen werden, regen jedoch auch teilweise akustische Moden an. Alle Vereinfachungen werden von Seo und Moon [3] durch die Annahme sehr kleiner Machzahlen gerechtfertigt. Entstehende Fehler sind also insbesondere bei leicht erhöhten Machzahlen zu erwarten.

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit den Effekten der durch die LPCE aus Stabilitätsgründen vernachlässigten Terme. Die Erkenntnisse lassen sich prinzipiell auf andere HAS-Verfahren übertragen. Die signifikanten Vereinfachungen von den PCE zu den LPCE ergeben sich in der Partikelgeschwindigkeitsgleichung. Ausgehend von der entsprechenden Gleichung der PCE kann eine neu charakterisierte Variante abgeleitet werden durch

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}}{\partial t} + \nabla \frac{p^{\mathrm{ac}}}{\rho^{\mathrm{ic}}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}}_{A} + \underbrace{\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}}}_{B} + \underbrace{\frac{\rho^{\mathrm{ac}}}{\rho^{\mathrm{ic}}} \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}}}{\mathrm{D}t}}_{C} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}}{\partial t} + \nabla \frac{p^{\mathrm{ac}}}{\rho^{\mathrm{ic}}} + \underbrace{\nabla\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}\right)}_{I} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{ac}} \times \boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}}}_{II} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{ic}} \times \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}}_{III} - \underbrace{\frac{\rho^{\mathrm{ac}}}{\left(\rho^{\mathrm{ic}}\right)^2} \nabla p^{\mathrm{ic}}}_{IV} + \underbrace{\frac{\rho^{\mathrm{ac}} \mu}{\left(\rho^{\mathrm{ic}}\right)^2} \nabla^2 \boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}}}_{V} = 0, \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ eine Wirbelstärke ist. Gleichung (2) entstammt der linearisierten Form der PCE unter Vernachlässigung viskoser und thermischer Effekte. Die weitere Umformung in Gleichung (3) erfolgt ohne entscheidende Vereinfachungen, führt jedoch zu besserer Analysierbarkeit. Terme A und B können mit Hilfe einer mathematischen Identität in Terme I, II und III umgeschrieben werden. Weiterhin wird der Term C mit Hilfe der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zu den Termen IV und V.

Die Terme II - V werden bei den LPCE unter Annahme sehr kleiner Mach-Zahlen vernachlässigt. Das Gleichungssystem lautet dann

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{ac}}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} \cdot \nabla\right) \rho^{\mathrm{ac}} + \rho^{\mathrm{ic}} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}\right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial p^{\mathrm{ac}}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} \cdot \nabla\right) p^{\mathrm{ac}} + \gamma p^{\mathrm{ic}} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}\right) + \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}} \cdot \nabla\right) p^{\mathrm{ic}} = -\frac{\mathrm{D}p^{\mathrm{ic}}}{\mathrm{D}t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}}{\partial t} + \nabla\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}} + \frac{p^{\mathrm{ac}}}{\rho^{\mathrm{ic}}}\right) = 0, \tag{6}$$

wobei $\frac{\mathrm{D}p^{\mathrm{ic}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial p^{\mathrm{ic}}}{\partial t} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}} \nabla p^{\mathrm{ic}}$ gilt und γ der Isentropenexponent ist. Die Gleichungen für den akustischen Druck p^{ac} (5) und die akustische Dichte ρ^{ac} (4) werden hier nicht weiter betrachtet und unverändert übernommen.

Kopplung von Wirbel- und Akustikmoden

Obwohl entsprechende Einflüsse oft vernachlässigt werden, sind die Wirbel- und die Akustikmoden nicht generell entkoppelt. Dies gilt nur in der voll linearisierten

Theorie, z.B. nach der Kovásznay-Zerlegung [4], welche bei signifikant großer Wirbelstärke ihre Gültigkeit verliert. Rotationsbehaftete Strömung kann grundsätzlich zu Konvektion, Reflexion und Brechung akustischer Wellen führen.

Eine korrekte Berechnung von Term II auf Akustiknetzen ist aussichtslos, da Auflösungen ähnlich der CFD nötig wären, um $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{ac}}$ korrekt vorherzusagen [3]. Da Instabilitäten von Wirbelmoden weiterhin primär dadurch entstehen, dass Fehler in der Simulation von Term II zu einem direkten Fehlerfeedback führen, sollte er vernachlässigt werden. Der vorliegende Beitrag lässt also Term II fallen, während Term III erhalten bleibt und zielt so auf eine Stabilisierung ab. Damit muss ein kleiner Teil des Ziels, alle Wirbeleffekte zu betrachten, aufgegeben werden. Die Vernachlässigung von Term II gegenüber Term III kann jedoch gerechtfertigt werden. Beispielsweise demonstriert [5] mit mehreren Beispielfällen, dass ein zu Term II äquivalenter Term für Verfahren, die um einen zeitlichen Mittelwert linearisieren, gegenüber anderen (z.B. einem Äquivalent zu Term III) vernachlässigbar ist. Da alle in Term II enthaltenen Größen nicht-akustisch sind, wird ein Quellterm vernachlässigt, der keinen Einfluss auf die Wellenausbreitung hat.

In der dimensionslosen Form der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen skaliert der Beitrag des Terms V gegenüber dem Term IV umgekehrt proportional zur Reynoldszahl (z.B. [6]). Der Term V ist daher im technisch relevanten hohen Reynoldszahlbereich vernachlässigbar und wird hier verworfen. Term IV ist ein Gradiententerm und kann daher keine Wirbelmoden anregen [6], er wird daher erhalten.

Falls nicht explizit anders erwähnt, ist in diesem Beitrag mit der Formulierung „erweiterte LPCE“ immer die Version mit Termen I, III und IV, jedoch ohne Terme II und V gemeint. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf Term III, da dieser im Beispielfall den größten Einfluss hat.

Wirbelmodenfilter

Mittels einer sogenannten Helmholtz-Hodge-Zerlegung (HHD, siehe z.B. [6]) kann ein typisches Geschwindigkeitsvektorfeld linear in eine rotationsfreie (wirbelfreie), eine divergenzfreie (inkompressible) und eine sowohl rotations- als auch divergenzfreie (harmonische/Potentialströmungs-) Komponente zerlegt werden. Orthogonalität und Eindeutigkeit sind bei entsprechenden Randbedingungen gewährleistet [6]. Da der harmonische Teil sowohl rotationsfrei als auch inkompressibel ist, kann eine Zwei-Komponenten-Form der HHD konstruiert werden, bei der der harmonische und der inkompressible Anteil zu einer Größe zusammengefasst werden. Um die HHD eines Vektorfeldes in die genannten Komponenten zu berechnen, werden Potentialfunktionen eingeführt [6]. Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{\nabla \Psi^{\mathrm{irr}}}_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{irr}}} + \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{ic}^*+\mathrm{h}}}_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}^*+\mathrm{h}}}. \tag{7}$$

Der Anteil $\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}^*+\mathrm{h}}$ kann als inkompressibler Strömungsanteil (CFD-Lösung) angesehen werden. Um Verwechslungen mit anderen inkompressiblen Indizes zu vermeiden, wird hier der Stern im Index $(\cdot)^{ic^*}$ eingeführt. Durch Divergenzbildung der Gleichung (7) und unter Verwendung der oben genannten Eigenschaften ergibt sich

$$\nabla^2 \Psi^{\mathrm{irr}} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}. \tag{8}$$

Es wird für spätere Analysen wird eine lineare Projektion $P : \boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{u}^{\mathrm{irr}}$ definiert, die aus dem Lösen der Poisson-Gleichung (8) mit entsprechenden Randbedingungen sowie dem Schritt $\boldsymbol{u}^{\mathrm{irr}} = \nabla \Psi^{\mathrm{irr}}$ (Gleichung (7)) besteht. Die Projektion $P(\boldsymbol{u})$ kann als Methode interpretiert werden, um alle rotationsbehafteten und harmonischen (und damit nicht-akustischen) Komponenten eines gegebenen Geschwindigkeitsvektorfeldes (Gleichungsterm oder Primärgröße) zu eliminieren. Diese Vorgehensweise wird hier als Wirbelfilterung bezeichnet. Der Ansatz ähnelt in wesentlichen Teilen der Quellfilterung aus [2].

Ergebnisse

Zur Analyse der oben beschriebenen Gleichungsterme wird ein Beispielfall nach Jacob et al. [7] verwendet. Es handelt sich um eine Zylinder-Flügelprofil-Anordnung, die von einem homogenen Freistrahl angeströmt wird (siehe Abbildungen 1 und 2). Akustische Effekte entstehen durch die Zylinderumströmung und insbesondere durch die Interaktion des Zylinder-Nachlaufs mit dem Flügelprofil. Die Strömung wurde mittels Large Eddy Simulation dreidimensional berechnet. Die Akustik wird nur in einem zweidimensionalen Mittelschnitt gelöst und spiegelt damit keinen realen Fall wieder. Da hier nur prinzipielle Phänomene gezeigt werden sollen, ist dies jedoch kein entscheidendes Problem. Der Fall wurde gewählt, da er Anwendungsrelevanz besitzt, als Umströmungsfall mit intensiven Scherschichten besonders anfällig für die Entwicklung von Wirbelmoden ist und mit $M = 0{,}21$ eine für die HAS-Ansätze recht hohe Mach-Zahl aufweist. Beide letztgenannten Eigenschaften sind interessant, da die Unterdrückung von Wirbelmoden in den LPCE unter diesen Voraussetzungen erheblichen Einfluss haben kann. Insbesondere enthält die Scherschicht des anströmenden Freistrahls (siehe Abbildung 2) eine signifikante Wirbelstärke, durch die sich die akustischen Wellen ausbreiten müssen. Die Scherschicht wurde als vereinfachter exponentieller Verlauf an die experimentellen Daten von [7] angenähert und nicht simuliert.

In diesem Beitrag wird zu Analysezwecken der oben eingeführte Wirbelfilter genutzt, um bei Bedarf die Entstehung von Wirbelmoden auch bei den erweiterten LPCE zu verhindern. Dafür wird das Inkrement von $\boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}$, welches während eines Zeitschritts berechnet wurde, gefiltert, bevor es zum Feld des letzten Zeitschrittes addiert wird.

Für eine erste Analyse wird die erweiterte LPCE-Version einschließlich des Wirbelfilterschrittes angewendet, um

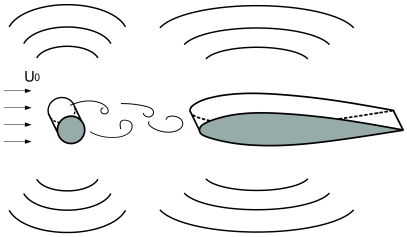

Abbildung 1: Skizze des Zylinder-Naca-Falls mit Akustik.

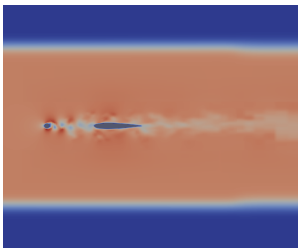

Abbildung 2: Momentaufnahme von $|\boldsymbol{u}^{\mathrm{ic}}|$.

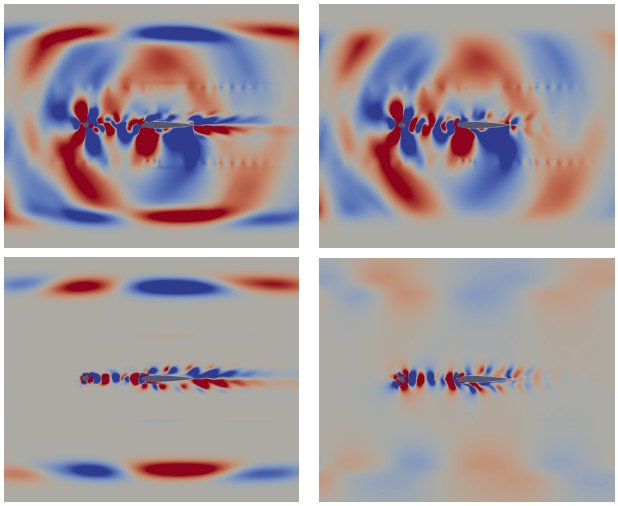

Abbildung 3: Momentaufnahme der x-Komponente der Terme I+III (oben links), I (oben rechts), III (unten links) und III nach Anwendung des Wirbelfilters (unten rechts).

die Erzeugung von Störungswirbeln zu vermeiden. Ein Anschließender Vergleich der Terme in der gestörten Geschwindigkeitsgleichung gibt Aufschluss über die Bedeutung der Terme mit Wirbeleffekt. Die Terme I und III werden gemeinsam mittels Abbildung 3 analysiert. Dort wird ein Vergleich ihrer Amplituden gezeigt. Alle Unterabbildungen stammen aus dem gleichen Zeitschritt. Es wird ersichtlich, dass die Wirkung der einströmenden Freistrahl-Scherschicht nicht klar erkennbar ist, wenn allein Term I betrachtet wird (wie in den Standard LPCE). Term III hingegen zeigt sehr starke Amplituden an der Scherschicht des Anströmfreistrahls. Da dieser Term sowohl Wirbel- als auch akustische Moden anregen kann, muss jedoch geklärt werden, inwieweit diese Terme auch für die akustischen Anteile relevant sind. Die Unterabbildung unten rechts zeigt den Term III nach Anwendung des Wirbelfilters, der zuvor beschrieben wurde. Übrig bleiben diejenigen Anteile, welche allein akustische Moden anregen. Es lässt sich erkennen, dass der Einfluss auf die Akustik vorhanden, aber nicht dominant ist. Term IV wird hier nicht weiter analysiert, da seine Amplituden in dem Beispielfall deutlich schwächer sind als die der Terme I und III.

Abbildung 4 zeigt das Wellenzahl-Frequenz-Diagramm der x-Komponente von $\boldsymbol{u}^{\mathrm{ac}}$ entlang der x-Achse stromabwärts des Flügelprofils. Die Amplituden sind auf eine gemeinsame Referenz normiert. Die Qualität der räumlichen Fourier-Transformation ist aufgrund der kurzen Domänenlänge gering. Für rein akustische Ergebnisse wird erwartet, dass das Wellenzahl-Frequenz-Diagramm eine lineare Abhängigkeit zwischen Wellenzahl und Frequenz mit der Schallgeschwindigkeit (zuzüglich der Konvektionsgeschwindigkeit von 72m/s) als Proportionalitätsfaktor zeigt. Wirbelmoden bewegen sich mit der Strömung und zeigen entsprechend größere Wellenzahlen für gleiche Frequenzen. Das oberste Diagramm in Abbildung 4 zeigt die erweiterten LPCE unter Zusatz von Term II. Diese Variante entwickelt unphysikalische und instabile Wirbelmoden, wie man an den extrem großen Amplituden abseits des akustischen Korridors erkennen kann. Trotz der Skalierung ist festzustellen, dass die allgemeine Steigung deutlich geringer ist, als es für akustische Moden erwartet wird. Dies lässt sich damit erklären, dass Wirbelmoden mit Strömungsgeschwindigkeit transportiert werden. Die erweiterten LPCE ohne Term II (mittleres Diagramm in Abbildung 4) zeigen erwartungsgemäß ebenfalls nicht-akustische Moden, akustische Anteile werden aber nicht überdeckt und sind im korrekten Korridor identifizierbar. Da der Term des gestörten Wirbeltransports (Term II) nicht enthalten ist, folgen die Störmoden nicht genau der Steigung, die vom Fließgeschwindigkeitstransport erwartet wird. Es ist erkennbar, dass das Fallenlassen des Terms II eine signifikante Stabilisierung bedeutet. Die Hinzunahme der Wirbelfilterstufe in jedem Zeitschritt (wie oben beschrieben) eliminiert vollständig alle störenden Moden (unterstes Diagramm in Abbildung 4) und liefert ein Ergebnis, das wieder rein akustisch ist. Der Wirbelfilter erfüllt seinen Zweck also wirksam.

Entscheidend ist die Frage, ob die Vernachlässigung von Termen in der LPCE die akustischen Moden beeinflusst. Es wird erwartet, dass Wirbeleffekte die niederfrequenten Komponenten und insbesondere deren Richtungswirkung am stärksten beeinflussen [5]. Daher wird die Richtungswirkung bei der Ablösefrequenz des Zylinders in Abbildung 5 verglichen. Winkel werden von der x-Achse gemessen (positive Strömungsrichtung). In der Abbildung ist, besonders bei 20-50 Grad, ein deutlicher Unterschied zwischen der Methode, die Wirbeleinflüsse beinhaltet (erweiterte LPCE) und den Standard LPCE, zu erkennen. Die Vernachlässigung von Termen in den Standard LPCE führt demnach zu Fehlern, die jedoch nicht dominant sind. Die erweiterten LPCE zeigen nur geringe Unterschiede in der akustischen Richtwirkung mit und ohne Wirbelfilterung. Dies liegt daran, dass die Richtcharakteristik im akustischen Ausbreitungsteil der Domäne bewertet wird, in den die Wirbelmoden nicht vordringen.

Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wurde der Einfluss sekundärer Terme in den Gleichungssystemen der sogenannten „hydrodynamic/acoustic splitting“-Formulierungen betrachtet. Repräsentativ wurden die „Linearized Perturbed Compressible Equations“ und eine erweiterte Variante derer untersucht. Insbesondere der Effekt von Termen wurde analysiert, die Wirbelmoden anregen können und daher oft vernachlässigt werden. Es wurde vorgeschlagen, die Stabilität zu erhöhen, indem gezielt derjenige Term fallengelassen wurde, der ein instabiles Feedback von falsch berechneten Wirbelmoden beinhaltet. Die Zulässigkeit dieser Vereinfachung wurde in begrenztem Umfang gerechtfertigt. Andere in den Standard LPCE vernachlässigte Terme, deren Effekt höher erwartet wurde, blieben erhalten. Mithilfe eines Wirbelfilters basierend auf der Helmholtz-Hodge-Zerlegung konnten weiterhin Wirbelmoden und akustische Anteile in den Gleichungstermen und im Simulationsergebnis getrennt und analysiert werden. Es konnte festgestellt werden, dass die Wirbelmoden anregenden Terme Effekt auf die akustischen Größen haben und ihre Vernachlässigung damit zu Fehlern führt, die im gezeigten Beispielfall jedoch nicht dominant waren.

Literatur

[1] Hardin, J. C. und Pope, D. S.: An Acoustic / Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics. Theoretical and Computational Fluid Dynamics 6 (1994), 323–340

[2] Ewert, R. und Schröder, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. Journal of Computational Physics 188 (2003), 365–398

[3] Seo, J. H., und Moon, Y. J.: Linearized Perturbed Compressible Equations for Low Mach Number Aeroacoustics. Journal of Computational Physics 218 (2006), 702–719

[4] Kovásznay, L.S.G.: Turbulence in Supersonic Flow , Journal of the Aeronautical Sciences, 20 (1953), 657–674

[5] Legendre, C.: On the interactions of sound waves and vortices. Dissertation, Universite Libre de Bruxelles, Brüssel, 2015

[6] Chorin, A. und Marsden, J. E.: A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer, New York, 1993

[7] Jacob, M. C., Boudet, J., Casalino, D. und Michard, M.: A Rod-Airfoil Experiment as a Benchmark for Broadband Noise Modeling. Theoretical and Computational Fluid Dynamics 19 (2005), 171–196

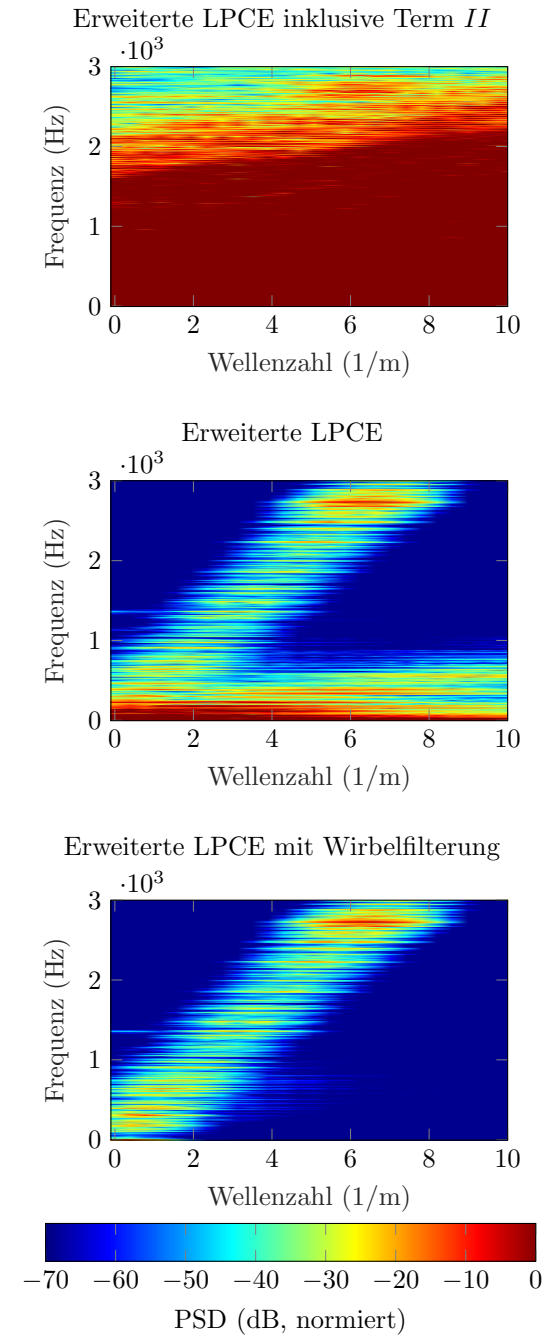

Abbildung 4: Wellenzahl-Frequenz-Diagramme.

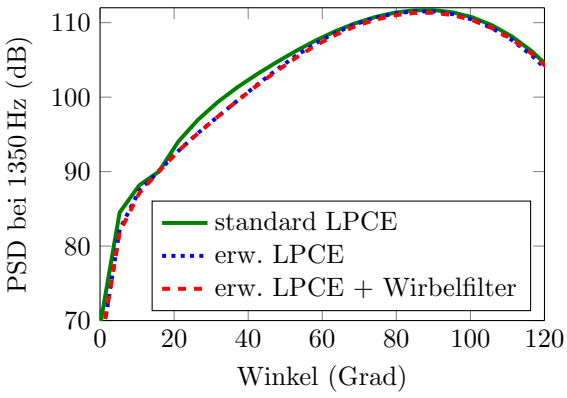

Abbildung 5: Richtcharakteristik des Schalldrucks.