

Unsicherheiten der Schalleistungsbestimmung mittels Radialmodenanalyse in Strömungskanälen

Tom Gensch, Maximilian Behn, Mirko Spitalny, Ulf Tapken

DLR, Institut für Antriebstechnik, Abteilung Triebwerksakustik, 10623 Berlin, Deutschland, Email: tom.gensch@dlr.de

Einleitung

Die Radialmodenanalyse (RMA) tonaler Schallfeldkomponenten ist eine etablierte Methode, um die z.B. von Turbomaschinen abgestrahlte Schalleistung in zylindrischen Strömungskanälen zu bestimmen, siehe [1]. Dabei werden die Anteile der geometrischen Eigenformen (auch Moden genannt) im gemessenen Schallfeld ermittelt.

Eine Bewertung der Unsicherheit der ausgewerteten Radialmodenamplituden fand bisher auf Basis einer Standardabweichungsanalyse der gemessenen Schalldruckamplituden und anschließender Fehlerfortpflanzung mittels einer Monte-Carlo-Simulation statt, siehe [1]. Ziel einer aktuellen Studie ist die Erweiterung der Messunsicherheitsbetrachtung auf alle relevanten Übertragungselemente und Einflussgrößen. Das vorliegende Paper beschränkt sich dabei auf die Zerlegung der Schalldruckamplituden in die Modenamplituden und die anschließende Schalleistungsberechnung.

Radialmodenanalyse

Bei der RMA werden die Modenamplituden \mathbf{a} (Einheit Pa) mittels

$$\mathbf{a} = \mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

bestimmt. Hierbei beschreibt die Matrix \mathbf{W} (Einheit 1) die modale Transfermatrix. Der Schalldruckvektor \mathbf{p} (Einheit Pa) enthält die gemessenen, komplexen Amplituden der betrachteten Frequenz an den einzelnen Mikrofonpositionen. Das Symbol $()^\dagger$ bedeutet, dass von der betreffenden Matrix die Pseudo-Inverse berechnet wird. Im Vektor \mathbf{a} sind die einzelnen Modenamplituden a_{mn}^\pm enthalten. Hierbei beschreibt m die azimutale und n die radiale Modenordnung. Durch den Exponenten \pm wird die axiale Ausbreitungsrichtung (+ in Strömungsrichtung, – entgegen) gekennzeichnet.

Ein Eintrag der modalen Transfermatrix setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$W_{jl} = f_{mn}(r_j) e^{i(k_{mn}^\pm x_j + m\theta_j)}, \quad (2)$$

wobei r_j, x_j und θ_j die Zylinderkoordinaten des j -ten Mikrofons beschreiben und m, n durch die jeweilige Mode des Index l festgelegt sind. Die komplexe Einheit wird durch i gekennzeichnet. Weiter ist f_{mn} die radiale Formfunktion und implizit von den Lösungen der Besselschen Differentialgleichung der jeweiligen Kanalgeometrien abhängig. Die axiale Wellenzahl $k_{mn}^\pm = k_{mn}^\pm(f, U_x, T, \dots)$ ist wiederum eine Funktion von beispielsweise Frequenz f , axialer Strömungsgeschwindigkeit U_x und Temperatur T . Wei-

terführend zum Thema RMA sei zum Beispiel auf [2] verwiesen.

Bei der Generierung von \mathbf{p} wird das gemessene Schallfeld im Zeitbereich adaptiv neu abgetastet (als Referenz dienen die Umdrehungen des Rotors) und danach über mehrere Umdrehungen gemittelt, siehe z.B. [2, Kapitel 3.1]. Dies geschieht, um Drehzahlschwankungen in der Frequenzanalyse zu kompensieren. Wird die RMA bei einer Harmonischen der so ermittelte mittlere Drehzahl ausgewertet, weist diese ausgewertete Frequenz jedoch Fehler auf, welche bei der Berechnung von \mathbf{W} in die RMA übergeben werden.

Nach [2] kann für axial gleichförmige und festkörperartig rotierende Strömungen eine explizite Darstellung für die Schalleistung P_{mn}^\pm einer Mode gefunden werden:

$$P_{mn}^\pm = f_{P_{mn}^\pm}(x_1, x_2, \dots) |a_{mn}^\pm|^2, \quad (3)$$

wobei $f_{P_{mn}^\pm}$ einen Proportionalitätsfaktor darstellt, der unter anderem von der axialen Machzahl und Frequenz abhängig ist.

Quantifizierung der Unsicherheit

Um den Einfluss der Unsicherheiten der Eingangsgrößen zu beschreiben, wird hier von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die Unsicherheitsfortpflanzung explizit analytisch zu berechnen, siehe [3]. Für unabhängige (unkorrelierte) Eingangsgrößen x_i ergibt sich demnach die kombinierte Unsicherheit u_c zu

$$u_c^2(\mathbf{a}) = \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \quad (4)$$

vergleiche [3, S. 19]. Dabei stellt die partielle Ableitung die Sensitivität bezüglich der Eingangsgröße sowie $u(x_i)$ die (Mess-)Unsicherheit der Eingangsgröße dar. Im Kontext der RMA ergibt sich die Funktion g zu

$$g = \mathbf{a}(x_1, x_2, \dots) = \mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{p}. \quad (5)$$

Die Sensitivität bezüglich des Schalldruckvektors \mathbf{p} berechnet sich dann einfach zu

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{W}^\dagger. \quad (6)$$

Für alle Eingangsgrößen die implizit in \mathbf{W} oder \mathbf{p} enthalten sind, kann die Sensitivität mittels Produktregel zu

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{W}^\dagger}{\partial x_i} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{W}^\dagger \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} \quad (7)$$

berechnet werden. Hierbei kann folgende Fallunterscheidung gemacht werden:

- Das Schallfeld ändert seine physikalischen Eigenschaften (z.B. Temperaturänderung) während der Messung. Diese Änderung wird von den Messsonden korrekt aufgezeichnet.

Hier wird angenommen, dass die aeroakustischen Quellen von diesen (kleinen) Änderungen während der Messung unbeeinflusst bleiben ($\mathbf{a}_{src} = \text{konst.}$). Es ergibt sich somit der Schalldruckvektor an den Mikrofonen mit (1) zu $\mathbf{p} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}_{src}$. Mittels [4] kann dann für (7)

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{W}^\dagger}{\partial x_i} \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W}^\dagger \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \right) \cdot \mathbf{a}_{src} \quad (8)$$

$$= \dots \quad (9)$$

$$= \left(-\mathbf{W}^\dagger \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} + \mathbf{W}^\dagger \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \right) \cdot \mathbf{a}_{src} \quad (10)$$

$$\equiv \mathbf{0} \quad (11)$$

gezeigt werden. Physikalischen Änderungen haben also keinen Einfluss auf die Sensitivität des Systems.

- Die Messsonden (z.B. für die Temperaturerfassung) detektieren stochastische Schwankungen.

Es wird angenommen, dass diese Schwankungen keine Auswirkung auf den an den Mikrofonen gemessenen Schalldruckvektor \mathbf{p} haben ($\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} \approx \mathbf{0}$). Damit vereinfacht sich (7) zu

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{W}^\dagger}{\partial x_i} \cdot \mathbf{p}. \quad (12)$$

Dieser Zusammenhang wird für alle weiteren Sensitivitätsbetrachtungen benutzt.

Bisher wurde nur die Sensitivität der Modenamplituden a_{mn}^\pm betrachtet. Für die Sensitivität der Schalleistung P_{mn}^\pm bezüglich der Eingangsgrößen x_i ergibt sich ausgehend von (3) mit Produkt- und Kettenregel

$$\frac{\partial P_{mn}^\pm}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{P_{mn}^\pm}}{\partial x_i} |a_{mn}^\pm|^2 + 2f_{P_{mn}^\pm} \Re \left\{ \frac{\partial a_{mn}^\pm}{\partial x_i} (a_{mn}^\pm)^* \right\}, \quad (13)$$

wobei $\Re \{ \}$ den Realteil und $()^*$ die komplexe Konjugation beschreibt. In die Sensitivität der Schalleistung einer Mode geht also auch die Sensitivität der Modenamplitude ein.

Anwendung auf Messdaten

Die oben gemachten Überlegungen werden auf einen realen Testfall angewendet. Dafür werden Messdaten eines Turbinenprüfstands herangezogen, siehe Abbildung 1. Für weitere Informationen zum Prüfstand siehe auch [5]. Bei den nachfolgenden Betrachtungen wurde das Schallfeld bei einem dominanten Turbinenschaufelton analysiert.

Auswertung der Modenamplituden

Die mit (1) berechneten Modenamplituden sind in Abbildung 2 zu finden. Dabei sind die azimuthalen Modenordnungen m auf der horizontalen Achse und die Schalldruckpegel auf der vertikalen Achse aufgetragen. Im oberen Plot sind die stromab-laufenden Modenordnungen

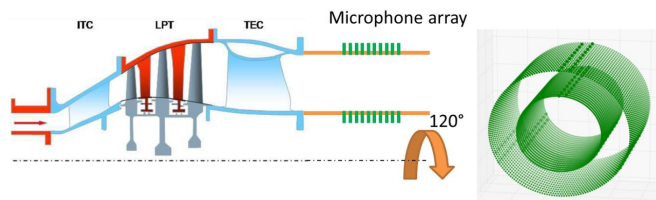


Abbildung 1: Links: Messaufbau des ausgewerteten Testfalls an einem Turbinenprüfstand. Rechts: Die durch Umfangstraversierung gewonnenen Mikrofonpositionen. Es wurden insgesamt 7200 Mikrofonpositionen abgetastet, an 20 axialen Stützstellen und 180 äquidistanten Umfangspositionen. Abbildung entnommen aus [5].

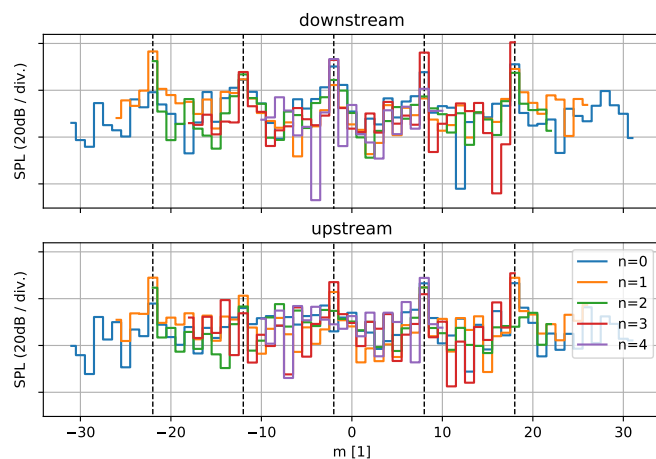


Abbildung 2: Modenamplituden a_{mn}^\pm beim betrachteten Testfall für verschiedene azimuthale (m) und radiale (n) Modenordnungen. Ausgewertet bei einem Schaufelton.

abgebildet, im unteren die stromauf-laufenden. Dieser Aufbau wird sich bei allen nachfolgenden Abbildungen wiederholen. Die verschiedenen radialen Ordnungen n sind mit unterschiedlich farbigen Linien eingezeichnet. Schwarz gestrichelt sind dominante azimuthale Modenordnungen gekennzeichnet (genau diese dominanten Ordnungen sind auch in allen nachfolgenden Plots markiert).

Bewertung von Sensitivitäten

Da die in (4) benötigten Eingangsunsicherheiten $u(x_i)$ bisher nicht ausgewertet wurden, können die Beiträge der einzelnen Eingangsgrößen x_i zur kombinierten Gesamtunsicherheit u_c noch nicht diskutiert werden. Um trotzdem einen Eindruck von den Beiträgen der Eingangsgrößen zu bekommen, werden die Sensitivitäten $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}$ (also die Empfindlichkeit des Systems bezüglich der Eingangsgrößen) verglichen, siehe (12). Dabei wird sich hier auf die exemplarische Betrachtung der Eingangsgrößen \mathbf{p} , f und U_x beschränkt und auf das formelmäßige Notieren der einzelnen Sensitivitäten zwecks Übersichtlichkeit verzichtet. Um bei der Berechnung der Schalldruckpegel die korrekte Eingangseinheit zu haben, wurden die Sensitivitäten mit der Einheit ihrer jeweiligen Eingangsgröße multipliziert, also $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{p}} \cdot [1 \text{ Pa}]$, $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial f} \cdot [1 \text{ Hz}]$ und $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial U_x} \cdot [1 \text{ m/s}]$.

Die modalen Sensitivitäten bezüglich dieser Eingangs-

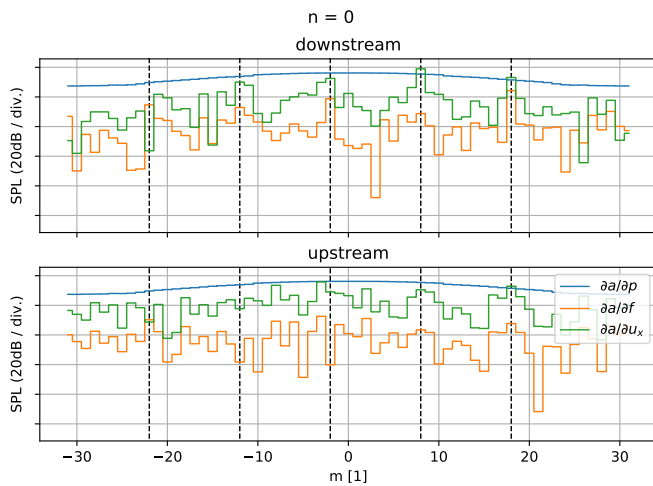


Abbildung 3: Sensitivität der Modenamplituden a_{mn}^{\pm} aus Abbildung 2 bei radialer Modenordnung $n = 0$.

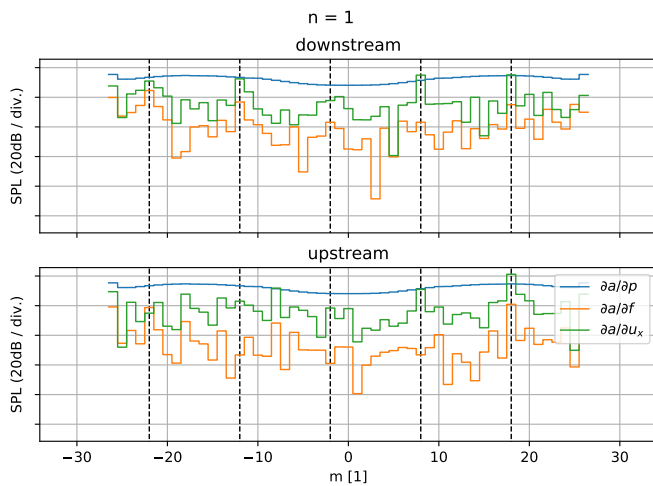


Abbildung 4: Sensitivität der Modenamplituden a_{mn}^{\pm} aus Abbildung 2 bei radialer Modenordnung $n = 1$.

größen sind in den Abbildungen 3, 4, 5, 6 und 7 zu finden (eine Abbildung pro radialer Ordnung n). Es wurden für jede radiale Ordnung nur die ausbreitungsfähigen Moden geplottet, weshalb der auswertbare Azimutalmodenbereich für höhere n immer kleiner wird. Die vertikalen Achsen aller oben angegebenen Abbildungen sind identisch.

Es zeigt sich für alle radialen Ordnungen ein recht glatter Verlauf für die Sensitivität bezüglich p . Die Sensitivitäten bezüglich f und U_x werden hingegen von den dominanten azimutalen Ordnungen des Modenamplitudenspektrums aus Abbildung 2 geprägt. Insgesamt zeigt sich, dass das System im Mittel am empfindlichsten auf Änderungen des Schalldruckvektors p reagiert. Bei einzelnen dominanten Ordnungen reagiert das System jedoch empfindlicher auf Änderungen bezüglich U_x . Weiterhin ist das System unempfindlicher gegenüber Änderungen in f .

Auswertung der modalen Schalleistung

Die mittels (3) ermittelte modale Schalleistung ist für den Testfall in Abbildung 8 abgebildet. Dazu sind alle

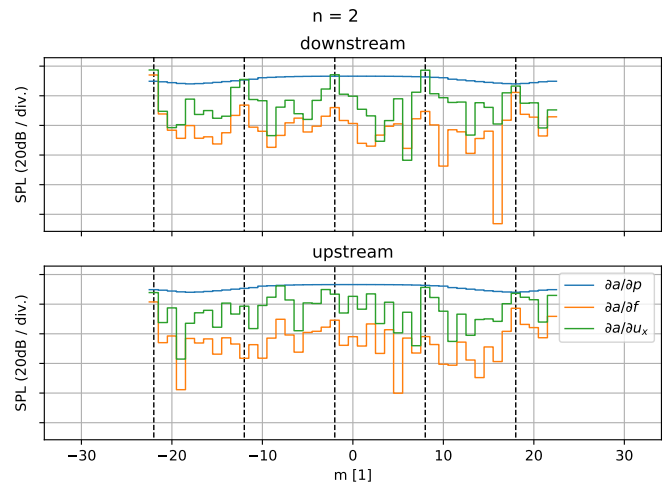


Abbildung 5: Sensitivität der Modenamplituden a_{mn}^{\pm} aus Abbildung 2 bei radialer Modenordnung $n = 2$.

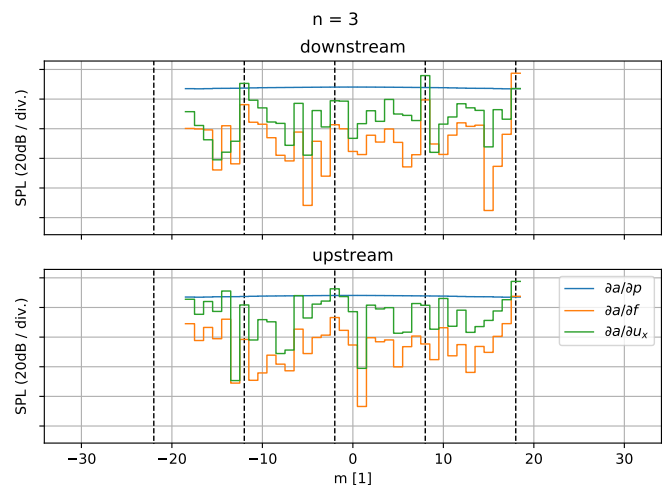


Abbildung 6: Sensitivität der Modenamplituden a_{mn}^{\pm} aus Abbildung 2 bei radialer Modenordnung $n = 3$.

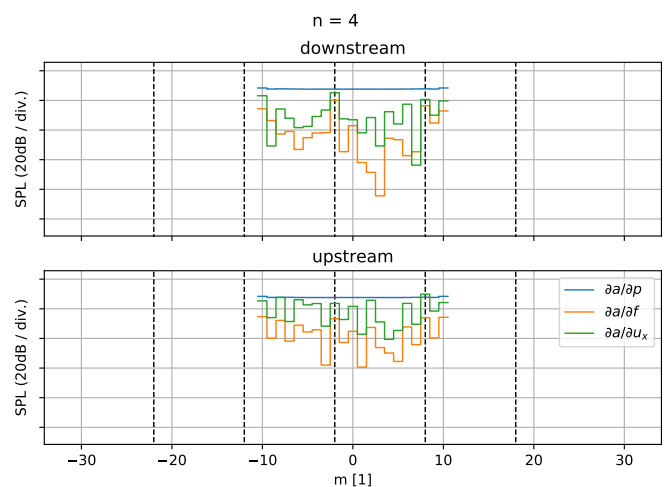


Abbildung 7: Sensitivität der Modenamplituden a_{mn}^{\pm} aus Abbildung 2 bei radialer Modenordnung $n = 4$.

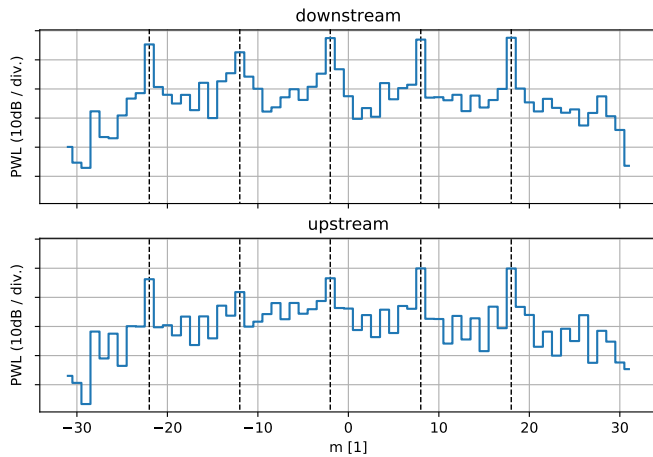


Abbildung 8: Schalleistungsspektrum P_m der azimuthalen Modenordnungen m .

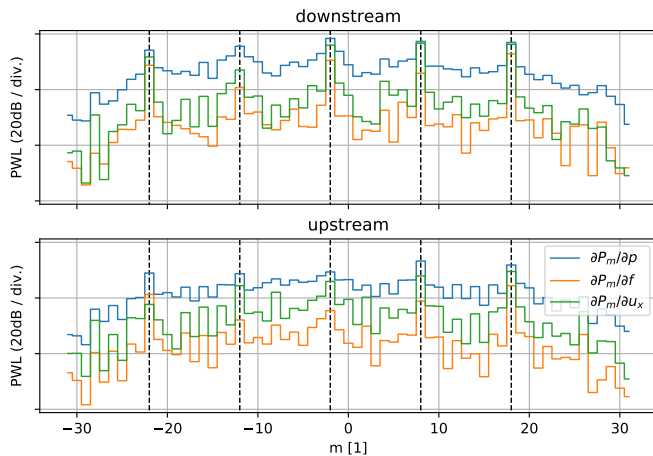


Abbildung 9: Sensitivität der azimuthalen Schalleistung aus Abbildung 8.

radialen Ordnungen n einer azimuthalen Ordnung m mittels

$$P_m^\pm = \sum_n P_{mn}^\pm \quad (14)$$

zusammengefasst. Auch hier wird das Spektrum durch die gleichen Ordnungen dominiert wie in Abbildung 2.

Die Sensitivitäten bezüglich der exemplarischen Eingangsgrößen sind in Abbildung 9 zu finden. Wie auch bei den Modenamplituden ist das System am unempfindlichsten gegenüber Schwankungen der Frequenz f und am sensitivsten gegenüber Schwankungen des Schalldruckvektors \mathbf{p} . Der Verlauf von $\frac{\partial P_m}{\partial \mathbf{p}}$ ist jedoch nicht mehr so glatt wie bei den Sensitivitäten der Modenamplituden, vergleiche Abbildungen 3 bis 7. Vielmehr sind die schwarz gestrichelten Moden (also die dominanten Moden der RMA) dominant, da die Modenamplitude direkt in die Sensitivität der Schalleistung eingeht, siehe (13).

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde vorgeschlagen, das Verfahren der analytischen Unsicherheitsfortpflanzung zur Quantifizierung

von Unsicherheiten bei der Radialmodenanalyse in zylindrischen Strömungskanälen zu nutzen. Dafür werden die Sensitivitätskoeffizienten durch analytische Ableitungen berechnet. Für Messdaten eines Turbinenprüfstands wurden diese Sensitivitäten bezüglich der exemplarischen Eingangsgrößen Schalldruck, axiale Strömungsgeschwindigkeit und Frequenz bei einem Schaufelton verglichen. Dabei zeigte sich, dass die Empfindlichkeit bezüglich des Schalldrucks am größten und bezüglich der Frequenz am geringsten ist.

In weiterführenden Studien müssen zunächst die Unsicherheiten der Eingangsgrößen quantifiziert werden, um den Schritt von der hier betriebenen Sensitivitätsanalyse zur Unsicherheitsanalyse zu machen. Weiterhin muss die Gültigkeit der in der analytischen Unsicherheitsfortpflanzung nach (4) implizit getroffenen Annahmen überprüft werden. Hier sind insbesondere die Annahme von (unabhängigen) unkorrelierten Eingangsgrößen und die lineare Abhängigkeit des Systems von den verschiedenen Eingangsgrößen (im durch die Unsicherheit der jeweiligen Eingangsgröße aufgespannten Definitionsbereich) zu nennen. Diese Überprüfung muss für jeden konkreten Anwendungsfall erfolgen. Gegebenenfalls müssen Korrekturterme eingeführt werden, um Fehler zu vermeiden. Schlussendliches Ziel ist es, das vorgestellte Tool auf alle relevanten Einflussgrößen inklusive der Messtechnik und aller Analyseschritte zu erweitern.

Danksagung

Die hier dargestellte Arbeit wurde im Rahmen des nationalen Projekts SiValT (Simulation und Validierung für eine effiziente & lärmarme Turbine der nächsten Generation) durchgeführt, welches durch das 5. Luftfahrtforschungsprogramm des Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (BMWi) gefördert wird.

Literatur

- [1] Tapken, U. et al: “A new modular fan rig noise test and radial mode detection capability” (2011), Proceedings of 17th AIAA / CEAS Aeroacoustics Conference, Paper No. AIAA 2011-2896
- [2] U. Tapken: “Analyse und Synthese akustischer Interaktionsmoden von Turbomaschinen” (2016), Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, Germany, URL: <https://elib.dlr.de/110269/>
- [3] JCGM 100:2008 : “Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement” (2008). First edition.
- [4] G. Golub, V. Pereyra: “The Differentiation of Pseudo-Inverses and Nonlinear Least Squares Problems Whose Variables Separate” (1973), SIAM Journal on Numerical Analysis, volume 10, number 2, p. 413-432
- [5] D. Broszat, et al: “Aerodynamic and Acoustic Testing of a Turbine Exit Casing with Integrated Hot Stream Liners in a Realistic Multi-stage Environment” (2018), Proceedings of 24th AIAA / CEAS Aeroacoustics Conference, Paper No. AIAA 2018-3916