Akustische Strahlungskräfte nach dem Impulskonzept.

O. Bschorr
Aeroakustik, Stuttgart

Zusammenfassung

Bei Luft- und Körperschall spielt der Strahlungsdruck eine untergeordnete Rolle. Der großen Wellenleistung und der kleinen -geschwindigkeit wegen ist der Strahlungsdruck bei Wasserwellen sehr viel mächtiger. Ein wellenabsorbierendes Ufer übt auf Treibgut eine anlandige Kraft aus und trägt so zur Selbstreinigung von Meeren bei. – Das Impulskonzept liefert für eine Longitudinalwelle der Energiedichte e [J/m^3] und der Wellenrichtung **t** [-] ein Tensorpotential **Q** [Pa] und damit eine Strahlungskraft **f** [N/m^3] im Innern und einen Strahlungs-druck **p** [Pa] an den Grenzflächen des Wellenleiters.

$\mathbf{Q} = e\mathbf{tt}$ $\quad\quad$ $\mathbf{f} = \mathrm{div}\,\mathbf{Q}$ $\quad\quad$ $\mathbf{p} = \mathrm{Div}\,\mathbf{Q}$

Um mit dem Kräftekonzept auf dieselben Formeln zu kommen war eine zusätzliche, heuristische Annahme notwendig.

Einleitung

Strahlungskräfte. Offensichtlich überträgt jede Wellenart nicht nur Strahlungsenergie sondern auch einen Strahlungsdruck. Die spektakulärste Wirkung zeigt der Lichtdruck mit der Ausrichtung des Kometenschweifs zur sonnenabgewandten Seite. Eine praktische Anwendung ist die 2018 mit dem Physik-Nobelpreis gewürdigte optische Pinzette. Hier dient der Lichtdruck eines Laserstrahles zum berührungsfreien Transport von mikroskopischen Objekten. Das akustische Pendant dazu – Acoustic levitation – ist der größeren Schallwellenlängen wegen weniger feinfühlig, wurde aber zur Manipulation von Probekörpern im schwerefreien Raum eingesetzt. Ein nicht mehr gebräuchliches Mess-Instrument ist die Schallwage um den Schalldruck direkt zu wiegen. Dazu ist die Oberseite der Waagschale reflektierend und die Unterseite schallabsorbierend ausgeführt. Nicht zuletzt beschert der Strahlungsdruck von Körperschallwellen die dekorativen Cladnischen Staubfiguren. Auch wegen der geringen Schallintensitäten handelt sich hier um marginale Effekte. Größere Kräfte bestehen in der Hydroakustik, mit dem sog. Quarzwind und bei Meereswellen. Meereswellen haben dank der hohen Intensität und der geringen Wellengeschwindigkeit besonders hohe Strahlungskräfte. So besteht in einem isotropen Wellenfeld zwischen zwei Schwimmkörpern eine gegenseitige Anziehungskraft. [3] Dies ist der Grund, dass sich aufschwimmendes Treibgut auf der Wasseroberfläche agglomeriert und dass die bei einer Container-Havarie in 1992 freigesetzten 29 000 Plastiktierchen, als „friendly floatees“ bei ihrer Passage durch die Weltmeere jahrelang einen Schwarm bildeten. Wahrscheinlich spielt auch der Strahlungsdruck bei der Konzentrierung des Plastikmülls in den Ozeanen eine Rolle. Sehr viel größer ist die Kraft gegenüber einem Linienabsorber, wie dies ein flach auslaufendes Ufer darstellt. Die einseitige Absorption bewirkt in Ufernähe eine gerichtete 2D-Schallintensität J [W/m]. Damit wirkt auf einen Schwimmkörper mit der Absorptionsbreite b [m] eine anlandige, für das Anschwemmen von Strandgut maßgebende Kraft F = Jb/c]N]. Der wellenbedingte Strahlungsdruck unterstützt so die Selbstreinigung der Meere.

Die Theorie der akustischen Strahlungskräfte hat Rayleigh begründet. Weitgehend abgeklärt und tabelliert ist der durch materialbedingte Nichtlinearität verursachte Strahlungsdruck. Leider hat die Dualität von ortsfester Euler- und der substanzbezogenen Lagrange-Beschreibung [1, 2] die Zahl der Druckdefinitionen verdoppelt und so eine mehr verwirrende Situation ausgelöst.

Aufgabenstellung. In [4] wurde der akustische Strahlungsdruck nach dem klassischen, von Cauchy paraphierten Kräftegleichgewicht berechnet. Um die einzelnen Komponenten zusammenzufassen war es notwendig ein heuristisches Tensorpotential **Q** anzunehmen. Aufgabe dieser Untersuchung ist, die akustischen Kräfte ohne zusätzliche Annahmen nach dem konkurrierenden, hypothetischen Impulskonzept [6] .zu berechnen. Zunächst sollen damit die konvektiven Strahlungskräfte von Longitudinalwellen bestimmt werden.

Kräftekonzept versus Impulskonzept

Modell. Bezeichnungen. Zugrunde gelegt wird ein linear-elastischer, verlustfreier Wellenleiter: Der Aufgabenstellung entsprechend, sind damit die materialbedingten Wellenkräfte a priori ausgeschlossen. In den feststehenden, globalen Koordinaten $\mathbf{x} = \{x_1\mathbf{x_1}, x_2\mathbf{x_2}, x_3\mathbf{x_3}\}$ [m]. hat der Wellenleiter an einem beliebigen Referenzpunkt $\mathbf{O} = \mathbf{O}(\mathbf{x})$ den Young-Modul E [Pa], die Dichte ρ [kg/m^3] und die Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{(E/\rho)}$ [m/s.]. Eine vektorielle Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x},t)$ [m] induziert den Spannungstensor $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}.t)$ [Pa]

$$\mathbf{T} = E\nabla\mathbf{s} \tag{1}$$

Zur Beschreibung einer Welle durch den Referenzpunkt **O** werden zusätzlich die dort fixierten lokalen Koordinaten **t**, **n**, **b** des begleitenden Dreibeins eingeführt. Der Tangentenvektor **t** [-] zeigt nach **t** = **s**/s in Richtung der Auslenkung **s** und der Normalenvektor **n** in Richtung des Krümmungsradius $\mathbf{R_K}$ [m]. Eine Schallwelle ist neben dem Krümmungs- zusätzlich durch den Divergenzradius $\mathbf{R_G}$ [m] bestimmt. Beide Radien sind nach (15,16) näher beschrieben.

$$\mathbf{t} = \mathbf{s}/s \quad\quad \mathbf{R_K^{-1}} = \mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} = \mathbf{n}/R_K \quad\quad \mathbf{R_G^{-1}} = \mathbf{t}\ \mathrm{div}\ \mathbf{t} \tag{2,3,4}$$

Kraftkonzept. Nach dem 1. Cauchy/Euler-Bewegungsgesetz besteht in einem elastischen Körper das Gleichgewicht von d´Alembert´scher Trägheitskraft $\rho\mathbf{s}^{\circ\circ}$ [N/m^3] und der von dem Spannungstensor **T** induzierte Kraft div **T**: ($\mathbf{s}^{\circ\circ} = d^2/dt^2$ = [m/s^2] = Beschleunigung.)

$$\rho\mathbf{s}^{\circ\circ} - \mathrm{div}\,\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad\quad \rho\mathbf{s}^{\circ\circ} - \mathrm{div}\,E\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Im homogenen Leiter hat die Planwelle in x-Richtung die Wellengleichung (6) mit der Lösung (7) $\;$ ($s'' = d^2s/dx^2$)

$$s^{\circ\circ} - c^2\, s'' = 0 \tag{6}$$

$$s = s_0 \sin\omega(t \pm x/c) \tag{7}$$

Bei einer deviatorische Verformung ist der Spannungstensor **T** (= Deviator) mit div $\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$ spurlos und (5) gibt keine Lösung.

Impulskonzept. Ein Ausweg ist, die Kräftebilanz durch eine Impulsbilanz zu ersetzen. Beide Bezugsgrößen – Kraft und Impuls – sind verwandt und unterscheiden sich durch eine Differentiationsstufe. Angeregt durch die von der Karlsruher KPK-Schule eingeführte Impulseinheit Huygens [Hy=mkg/s] wurde in [5] hypothetisch das Gleichgewicht von kinetischem $\rho\mathbf{c}s^\circ$ und potentiellem Impulsfluss $\mathbf{T}$ [Hy/sm^2] angesetzt (Hy/sm^2 = Huygens Hy pro Zeit- und Flächeneinheit).

$$\rho\mathbf{c}s^\circ - \mathbf{T} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \rho\mathbf{c}s^\circ - E\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Dieser Ansatz hat für die plane, in x-Richtung laufende Welle die Grundgleichung (9) mit der Lösung (10): ($s' = ds/dx$)

$$s^\circ - c\, s' = 0 \qquad c = \{+c, -c\} \tag{9}$$

$$s = s_0 \sin\omega(t - x/c) \qquad c = \{+c, -c\} \tag{10}$$

Akustische Strahlungskräfte

Strahlungskräfte nach Impulskonzept. Im Normalfall ist die Schnelle s° sehr viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit c, so dass ein linearer Ansatz ausreichend ist. Um gerade die Nichtlinearität zu berücksichtigen ist anstelle der linearen Ausgangsgleichung (4) zu setzen $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{s}^\circ$. [5]. Damit wird

$$\rho(\mathbf{c} + \mathbf{s}^\circ)\mathbf{s}^\circ - \mathbf{T} = \rho\mathbf{c}s^\circ + \rho\mathbf{s}^\circ\mathbf{s}^\circ - \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{11}$$

Der lineare Term $\rho c s^\circ$ ergibt die harmonische Welle (10), diese ist symmetrisch zur Null-Linie, so dass auch deren Zeitmittel Null ist, $\langle\rho c s^\circ\rangle_t = 0$. Der quadratische Term $\mathbf{Q} = \rho\mathbf{s}^\circ\mathbf{s}^\circ$ [Pa] dagegen ist stets positiv und liefert einen Gleichdruck. Mit der effektiven Schnelle $v = s^\circ/\sqrt{2}$ wird die kinetische Energiedichte $e_{kin} = ½\, \rho v^2$ [J/m^3]. Zusammen mit der gleich großen potentiellen Anteil wird die Gesamtenergiedichte $e = 2e_{kin} = \rho v^2$ und erhält damit der weiter verwendete Spannungstensor

$$\mathbf{Q} = \rho v^2\, \mathbf{tt} = e\, \mathbf{tt} \tag{12}$$

Auf $\mathbf{Q}$ den div-Operator angewandt ergibt die formale Ausrechnung die Strahlungskräfte $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ [N/m^3].

$$\mathbf{f} = \mathrm{div}\, \mathbf{Q} = \mathrm{div}\, e\mathbf{tt} = \mathbf{tt}\cdot\nabla e + e\, \mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} + e\, \mathbf{t}\, \mathrm{div}\, \mathbf{t} \tag{13}$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{tt}\cdot\nabla e = \mathbf{J}'/c = ec'/c. \tag{14}$$

$$\mathbf{f}_2 = e\, \mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} = \rho v^2\mathbf{R_K}^{-1} \qquad \mathbf{f}_3 = \rho v^2\mathbf{t}\, \mathrm{div}\, \mathbf{t} = \rho v^2\mathbf{R_G}^{-1} \tag{15,16}$$

Die 1. Kraftkomponente $\mathbf{f}_1 = \mathbf{tt}\cdot\nabla e$ wirkt in Wellenrichtung $\mathbf{t}$ und hat den Betrag $f_1 = \mathbf{t}\cdot\nabla e = de/dx = e'$. Mit dem Zusammenhang $e = J/c$ zwischen Schallenergie e und Schallintensität J. entspricht die Kraft f_1 dem geläufigeren Ausdruck $f_1 = J'/c$ mit der Intensitätsabnahme J' [W/m^2m].- In gleicher Weise verursacht auch ein Gradienten der Wellengeschwindigkeit $c' = dc/dx$ eine Strahlungskraft $f_1' = ec'/c$.

Der 2. Term $\mathbf{f}_2 = e\, \mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} = \rho v^2\mathbf{R_K}^{-1} = \rho v^2\mathbf{n}/R_K$ beschreibt die bei einem gekrümmten Wellengang mit dem Krümmungsradius R_K in Normalenrichtung $\mathbf{n}$ wirkende Zentrifugalkraft.

Der 3. Term $\mathbf{f}_3 = f_3\, t = e\, \mathbf{t}\, \mathrm{div}\, \mathbf{t}$ wirkt wieder in Wellenrichtung $\mathbf{t}$. Der Divergenz-Radius $R_G = (\mathrm{div}\, t)^{-1}$ gibt die sphärische Divergenz der Wellenfront wieder und liefert bei divergierender Welle – bei positivem R_G – eine Kraft $f_3 = e/R_G$ in Wellenrichtung t; bei Konvergenz in die entgegengesetzte Richtung. Bei einer Kugelwelle entspricht R_G dem Quellabstand.

Vergleich der Strahlungskräfte nach Impuls- und Kraftkonzept. In [4] wurden die konvektiven Strahlungskräfte nach dem Kräftekonzept bestimmt. Danach wird mit einer in $\mathbf{t}$-Richtung laufenden Longitudinalwelle

$$\mathbf{s_I} := \mathbf{s}(x,t) = s_0\mathbf{t}\, \sin(\omega t - kx) \tag{17}$$

als lineare Erstlösung s_I via Störungstheorie die verbesserte, nichtlineare Zweitlösung s_{II} bestimmt.

$$\mathbf{s_{II}}^{\circ\circ} =\cdot\ \mathbf{s_I}^{\circ\circ} + \mathbf{s_I}\cdot\nabla\, \mathbf{s_I}^{\circ\circ} \qquad \mathbf{s_{II}}'' =\cdot\ \mathbf{s_I}'' + \mathbf{s_I}\cdot\nabla\, \mathbf{s_I}'' \tag{18}$$

Diese in die Kräftegleichung (4) eingesetzt, liefert den in **O** herrschenden, zeitlichen Kräfteverlauf $\mathbf{f}(t)$ und das Zeitmittel $\mathbf{f} = \langle\mathbf{f}(t)\rangle_t$

$$\mathbf{f}(t) = \rho\, [\mathbf{s_I}\cdot\nabla(\mathbf{s_I}^{\circ\circ} - c^2\mathbf{s_I}'')] \tag{19}$$

$$\mathbf{f} = \langle\mathbf{f}(t)\rangle_t = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \tag{20}$$

Im Zeitmittel $\mathbf{f} = \langle\mathbf{f}(t)\rangle_t$ heben sich die linearen Kräfte auf und die verbleibenden quadratischen Anteile sind die gesuchten Schallstrahlungskräfte $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$. Diese stimmen mit den über das Impulskonzept gefundenen Einzelwerten nach Gl. (13) vollkommen überein. Der einzige Unterschied ist, dass das Impulskonzept primär das Tensorpotential $\mathbf{Q}$ liefert, um daraus formal die Kräfte nach $\mathbf{f} = \mathrm{div}\, \mathbf{Q}$ zu berechnen. Beim Kraftkonzept dagegen ist die Reihenfolge umgekehrt: Die primären Ergebnisse sind die Kraftkomponenten $\mathbf{f}_{1,2,3}$ und aus diesen wurde in [4] heuristisch eine Potentialfunktion $\mathbf{Q}$ erraten.

Akustischer Strahlungsdruck

Eine Körperschallwelle mit dem Impulstensor $\mathbf{Q}$ verursacht nach [4] bei Absorption, Reflexion oder Brechung an einer Flächendiskontinuität einen Druckvektor $\mathbf{p}$ [Pa]

$$\mathbf{p} = \mathrm{Div}\, \mathbf{Q} = \mathrm{Div}\, e\mathbf{tt} \tag{21}$$

Hat die Diskontinuität die Flächennormale $\mathbf{g}$ und sind e_1 und $\mathbf{t_1}$ (e_2,$\mathbf{t_2}$) Energie und Richtung der einfallenden (ausfallenden) Welle dann liefert die Flächendivergenz Div $\mathbf{Q}$ den Druck $\mathbf{p}$.

$$\mathrm{Div}\, \mathbf{Q} = \mathbf{p} = (e_1\mathbf{t_1}\, \mathbf{t_1} - e_2\mathbf{t_2}\mathbf{t_2})\cdot\mathbf{g} \tag{22}$$

Anhang:

Spannungstensor. Hier soll die von einem Spannungstensor $\mathbf{Q}$ [Pa] induzierte Strahlungskraft $\mathbf{f}$ [N/m^3] abgeleitet werden: Bekannt ist, dass ein Spannungstensor $\mathbf{Q}$ auf das vektorielle Flächendifferential d$\mathbf{A}$ [m^2] die Kraft d$\mathbf{F}$ = $\mathbf{Q}\cdot$d$\mathbf{A}$. [N] ausübt. Umschließt die Summe der Flächenelemente d$\mathbf{A}$ ein Volumen V [m^3] so ergibt sich mit dem tensoriellen Gaußschen Integralsatz die Gesamtkraft $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{F} = \int_A d\mathbf{F} = \int_A \mathbf{Q}\cdot d\mathbf{A} = \int_V \mathrm{div}\, \mathbf{Q}\, dV \tag{23}$$

Der Grenzübergang $V \rightarrow dV$ und die Setzung $\mathbf{f} = \mathbf{F}/dV$ geben die vom Spannungstensor $\mathbf{Q}$ induzierte spezifische Kraft $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \mathrm{div}\, \mathbf{Q} \tag{13)(24}$$

Literatur. Quellen

[1] M. Hamilton, D. Blackstock: Nonlinear Acoustics. Academic Press (1998)

[2] R.T. Beyer: Nonlinear Acoustics. Acoustic .Society of .America.(1997)

[3–5] O. Bschorr: DAGA Fortschritte der Akustik.

[3] 1987. S.389.Selbstorganisation im isotropen Wellenfeld.

[4] 2010. S. 919. Akustische Strahlungskräfte.

[5] 2014. S. 80. Deviationswellen im Festkörper.

[6] H.-J. Raida. O. Bschorr: DAGA 2018. Konventionelles Kräftekonzept versus hypothetisches Impulskonzept.