

# Numerische Modellierung der Schallausbreitung im menschlichen Vokaltrakt

Pascal Hahn<sup>1</sup>, Mario Fleischer<sup>2</sup> und Stefanie Retka<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt, 97421 Schweinfurt, Deutschland,

Email: pascal.hahn@fhws.de, stefanie.retka@fhws.de

<sup>2</sup> Charité Universitätsmedizin Berlin, 10117 Berlin, Deutschland, Email: mario.fleischer@charite.de

## Einleitung

Die Ausbreitung des Schalls im menschlichen Vokaltrakt(VT) wird maßgeblich von dessen Geometrie und vorhandenen Randbedingungen beeinflusst [1]. Man vermutet, dass die lokale Verteilung von verschiedenen akustischen Impedanzen im VT eine wichtige Rolle spielt [2]. Daraus ableitend kann man sagen, dass sich die Schallimpedanz im Rachenraum von der in der Mundhöhle unterscheidet. Ausgehend von den Beobachtungen im VT, geht es in diesem Beitrag um den Einfluss der akustischen Impedanz, wenn sie eine Funktion vom Ort in einem geschlossenen Gebiet darstellt. Um ein grundlegendes Verständnis der akustischen Verhältnisse im geometrisch und funktionell komplexeren VT zu erlangen, wird in diesem Artikel eine einfache Ersatzstruktur (Rohr) herangezogen. Dies ist außerdem damit begründet, dass der VT sich beim Sprechen von Vokalen annähernd wie ein Rohr verhält [3]. Dabei wird der Einfluss der Ortsabhängigkeit der Impedanz bei der Ausbreitungsart der Schallwelle deutlich, wie in diesem Artikel gezeigt wird.

## Material und Methoden

Für die Berechnung der Schallausbreitung und dem akustischen Druck  $\tilde{p}$  in einem Volumengebiets  $\Omega$  wird die Helmholtz-Gleichung in der Form

$$(-\kappa^2 - \nabla^2)\tilde{p} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

verwendet. Dabei handelt es sich bei  $\kappa$  um die Wellenzahl, die sich aus der Schallgeschwindigkeit  $c$  und der Kreisfrequenz  $\omega$ , mit  $\kappa = \omega/c$  zusammensetzt [4]. Als Medium wird Luft angenommen. Bei  $\nabla$  handelt es sich um den Nabla-Operator.

## Impedanzformulierung

Die akustische Impedanz beschreibt die Bewegung  $\tilde{\mathbf{v}}_a$ , die durch den anliegenden akustischen Druck  $\tilde{p}$ , auf einer Fläche  $\Gamma$  induziert wird [5]. Dabei handelt es sich bei  $\Gamma$  um eine Randschicht des Gebiets  $\Omega$ . Für den Ausdruck der Impedanz ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\tilde{Z}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\tilde{p}(\mathbf{x}, \omega)}{\tilde{\mathbf{v}}_a(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}. \quad (2)$$

Dabei handelt es sich bei  $\mathbf{x}$  um einen Punkt auf der Fläche  $\Gamma$  mit dem auswärts gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}$ . Bei dem Ausdruck für die Impedanz handelt es sich um eine komplexwertige Größe. Der Realteil beeinflusst das Reflexions- und Absorptionsverhalten von Schallwellen. Wenn  $\Re(\tilde{Z}) > 0$  dann ist die Oberfläche passiv und absorbiert akustische Energie. Im Gegensatz dazu gilt

für  $\Re(\tilde{Z}) < 0$ , dass die Oberfläche aktiv ist und akustische Energie erzeugt [5]. Bei  $\Im(\tilde{Z})$  handelt es sich um die Reaktanz, die beschreibt wie viel akustische Energie an der Fläche  $\Gamma$  gespeichert und wieder abgegeben werden kann [6].

## Numerische Modellierung

In Anlehnung zum VT wird ein Rohr, wie in Abbildung 1 gezeigt, in drei Bereiche unterteilt: den Eingang, die Wand des Rohrs und den Ausgang [2]. Für die numerischen Simulationen ist es sinnvoll ein Rohr mit einer Länge von 170 mm und einem schmalen Durchmesser von 20 mm zu wählen. Der Grund ist, dass der VT ebenfalls in dieser Größenordnung liegt.

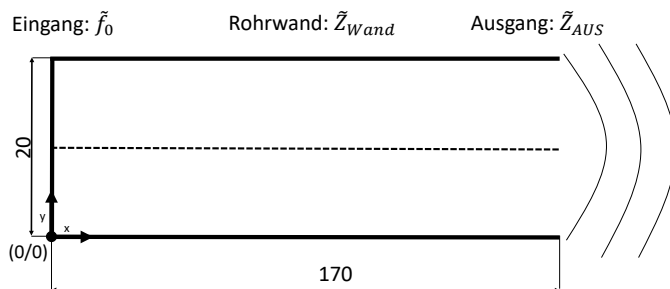


Abbildung 1: Modell des Rohrs mit den zugehörigen Impedanzverteilungen und Randbedingungen.

Die Anregung im Rohr wird mit der Neumann-Randbedingung

$$\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} = \tilde{f}_0 \quad \text{für } \Gamma_{\text{EIN}} \quad (3)$$

umgesetzt [2]. Für die Wand des Modells gilt

$$\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} = -j\kappa \frac{c\rho_0}{\tilde{Z}_{Wand}} \tilde{p} \quad \text{für } \Gamma_{\text{Wand}} \quad (4)$$

und für den Ausgang am Rohr

$$\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} = -j\kappa \frac{c\rho_0}{\tilde{Z}_{AUS}} \tilde{p} \quad \text{für } \Gamma_{\text{AUS}}. \quad (5)$$

Für numerische Berechnungen wird die schwache Formulierung der Helmholtz-Gleichung verwendet, bei der Gleichung (1) mit der Testfunktion  $q$  multipliziert und über das Volumen des Gebiets  $\Omega$  integriert wird [7]. Zusätzlich wird noch das Gausstheorem angewendet und es ergibt

sich für das System des Vokaltrakts folgende Differentialgleichung [2]

$$\begin{aligned}
& -\kappa^2 \int_{\Omega} q \tilde{p} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla \tilde{p} d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{\text{AUS}}} j \frac{\kappa c \rho_0}{\tilde{Z}_{\text{AUS}}} q \tilde{p} d\Gamma_{\text{AUS}} - \int_{\Gamma_{\text{Wand}}} j \frac{\kappa c \rho_0}{\tilde{Z}_{\text{Wand}}} q \tilde{p} d\Gamma_{\text{Wand}} \\
& + \int_{\Gamma_{\text{EIN}}} q \tilde{f}_0 d\Gamma_{\text{EIN}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Gleichung (6) wird in eine globale Form überführt, die dann für Finite-Elemente Berechnungen benutzt wird. Dafür wird für den akustischen Druck  $\tilde{p} \simeq p_h = \mathbf{N}^T \mathbf{P}$  eingesetzt und für die Testfunktion  $\tilde{q} \simeq q_h = \mathbf{N}^T \mathbf{Q}$ . Dabei ist  $\mathbf{N}$  der Vektor der Ansatzfunktion,  $\mathbf{P}$  der Vektor des gesuchten Drucks in jedem Knotenpunkt des Netzes und  $\mathbf{Q}$  der Wert der Testfunktion in jedem Knoten [2]. Durch Substitution erhält man dann die DGL in Matrixschreibweise

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \mathbf{P} = 0. \tag{7}$$

Dabei stellt  $\mathbf{M}$  die globale Massenmatrix dar,  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{D}$  die Dämpfungsmatrix des Systems. Im Rahmen dieses Artikels wird der Imaginärteil der Impedanz vernachlässigt, da sich nur auf die Auswirkung der Absorption fokussiert wird. Dabei gilt, für  $\Im(\tilde{Z}) = 0$  und damit für die Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_0}{\Re(\tilde{Z})} \int_{\Gamma} q(x) p(x) d\Gamma. \tag{8}$$

Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  bleiben hingegen unbeeinflusst von der Impedanz. Die numerische Umsetzung von Gleichung (7) erfolgte in Python mit Hilfe der Bibliothek FEniCS [8].

Die Anregung erfolgt bei der zweiten Eigenfrequenz, des ungedämpften Systems für eine Schallgeschwindigkeit  $c_0 = 343 \text{ m/s}$ , mit  $f = 2018 \text{ Hz}$ , bei der sich für die Druckwelle im Rohr zwei Knotenpunkte ergeben. Neben der Amplitude wird auch die Phasenlage  $\Phi$  des Druckes entlang der Längskoordinate  $x$  bei  $y = 10 \text{ mm}$  analysiert. Für die Simulationen werden verschiedene Parametervariationen durchgeführt, welche in Tabelle 1 aufgelistet sind. Für die Varianten A und B wird die Wandimpedanz mit  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}}) = \infty$  vorgegeben, was einem schallharten Rand entspricht. Beide Varianten unterscheiden sich bei der Randbedingung am Ausgang  $\Re(\tilde{Z}_{\text{AUS}})$ . Für Variante A wird  $\Re(\tilde{Z}_{\text{AUS}}) = \rho_0 c$  angenommen, was ein offenes Rohr darstellt. Hier kommt es zu keiner Reflexion der sich ausbreitenden Schallwelle am Ausgang. Bei Variante B ist  $\Re(\tilde{Z}_{\text{AUS}}) = \infty$ , was eine Totalreflexion der Schallwelle am Ausgang bedeutet. Um eine teilabsorbierende Randschicht, für die Varianten C und D, am Rohrausgang vorzugeben, wird  $\Re(\tilde{Z}_{\text{AUS}}) = 50\rho_0 c$  angenommen. Bei Variante C wird vorausgesetzt, dass  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}})$  über die Mantelfläche des Rohrs konstant ist. Als untere Grenze wird  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}}) = 8\rho_0 c$  festgelegt, um das System nicht zu stark zu dämpfen. Im Fall von Variante D wird die Mantelfläche des Rohrs in zwei Bereiche unterteilt.

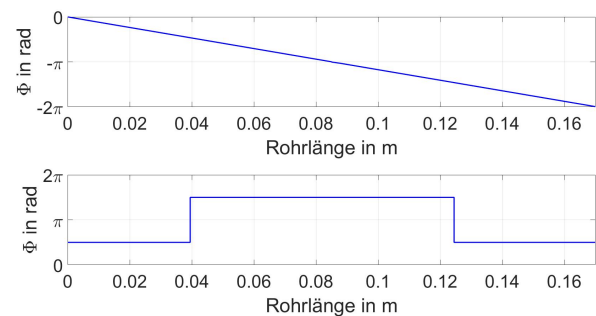
Ausgehend von der Anregung, verläuft der erste Bereich B1 von 0 bis 110 mm und für dessen Wandimpedanz gilt  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}}) = 10\rho_0 c$ , was einer starken Absorption entspricht. Der zweite Bereich B2 ist so gewählt, dass dieser ca. 20 mm vor der Lage des zweiten Knotenpunkts der Druckwelle beginnt und geht von 110 mm bis 170 mm. Dort wird  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}}) = 50\rho_0 c$  angenommen, was einen annähernd schallharten Rand darstellt.

**Tabelle 1:** Parametervariationen der Randbedingungen des Modells.

Variante	Parameter	
	$\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}}) =$	$\Re(\tilde{Z}_{\text{AUS}}) =$
A	$\infty$	$\rho_0 c$
B	$\infty$	$\infty$
C	$n\rho_0 c$ für $n > 1$	$50\rho_0 c$
D	$10\rho_0 c$ für B1 $50\rho_0 c$ für B2	$50\rho_0 c$

## Ergebnis und Diskussion

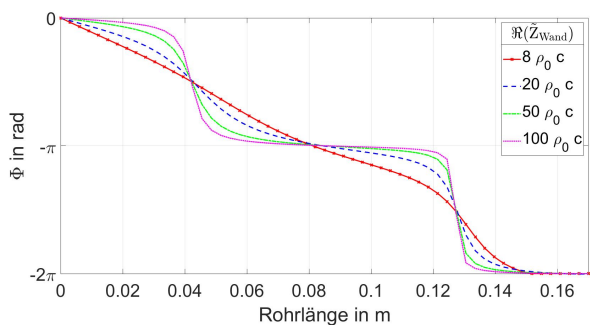
Zuerst wird der Unterschied der Phase  $\Phi$  für eine wandernde und eine stehende Welle anhand von Abbildung 2 veranschaulicht. Die Modellvarianten (siehe Tab. 1) A und B zeigen aufgrund unterschiedlicher Randbedingungen am Modellausgang unterschiedliche Phasenlagen. Für Variante A ist eine wandernde, für Variante B dagegen eine stehende Welle zu beobachten. Man erkennt für eine wandernde Welle, dass der Verlauf von  $\Phi$  eine Funktion des Ortes mit stetigem Verlauf ist. Im Gegensatz hierzu, verläuft  $\Phi$  für eine stehende Welle konstant und es sind zwei Phasensprünge sichtbar. Diese treten bei den Knotenpunkten der Welle auf.



**Abbildung 2:** Phase  $\Phi$  für eine wandernde Welle (oben, Variante A) und eine stehende Welle (unten, Variante B).

Abbildung 3 zeigt die Phase  $\Phi$  über der Länge des Rohrs in Abhängigkeit von  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}})$  für Variante C. Man erkennt anhand von  $\Phi$ , dass die Welle für niedrige Werte von  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}})$  wandernden Charakter hat, da  $\Phi$  über die gesamte Rohrlänge nicht konstant ist. Im Gegensatz hierzu ist bei höheren Werten für  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}})$  ein konstanter Verlauf von  $\Phi$  zu erkennen, wobei es zwei Mal zu einem Sprung von  $\Phi$  um den Faktor  $\pi$  kommt. Die Verläufe zeigen, dass sich mit abnehmender Wandimpedanz der Anteil der wandernden Welleneigenschaft erhöht.

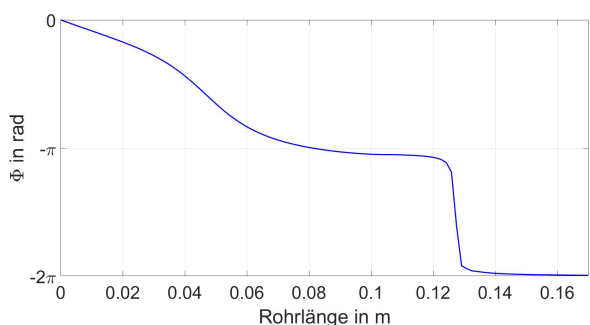
Die Auswirkung der Unterteilung der Impedanz nach



**Abbildung 3:** Einfluss des Realteils der Impedanz  $\Re(\tilde{Z})$  auf die Phase  $\Phi$ , welche entlang der Länge des Rohrs aufgezeichnet wird (Variante C).

Variante D ist in Abbildung 4 zu sehen, welche die Phase  $\Phi$  über die Länge des Rohrs zeigt. Dabei ist erkennbar, dass im stark gedämpften Bereich B1,  $\Phi$  von 0 auf  $-\pi$  gleichmäßig abfällt. Ab ca. 100 mm verläuft  $\Phi$  konstant bei ungefähr  $-\pi$  und fällt bei 125 mm sprunghaft auf  $-2\pi$  ab. Der beschriebene Verlauf zeigt, dass die Welle im Rohr bis 100 mm wandernd ist und danach bis zum Rohrende stehend.

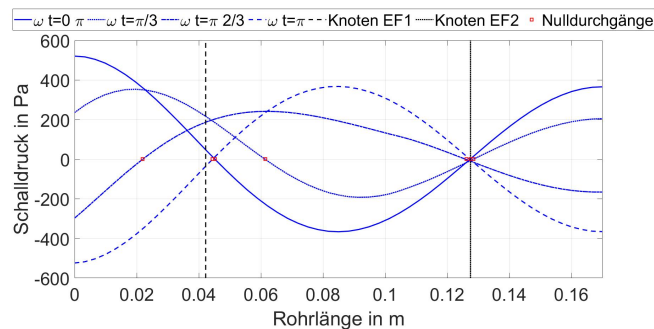
Um die genannte Beobachtung aus Abbildung 4 zu ver-



**Abbildung 4:**  $\Phi$  entlang der Länge des Rohrs für Variante D.

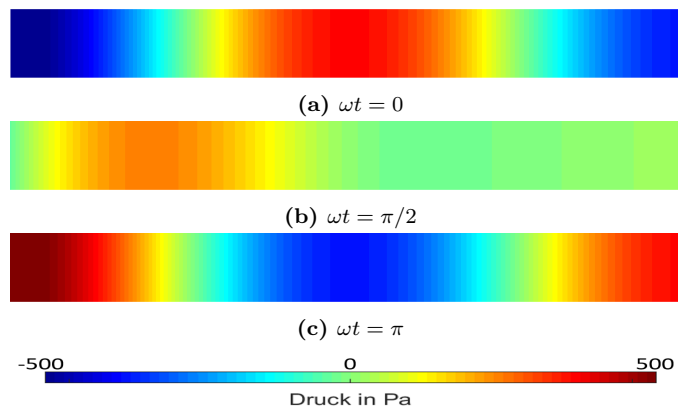
anschaulichen, wird in Abbildung 5 der Verlauf der Amplitude des Drucks für verschiedene Zeitpunkte gezeigt. Ebenfalls werden die Knotenpunkte für die zweite Eigenfrequenz der stehenden Welle gezeigt, wenn das System komplett ungedämpft ist. Für den ungedämpften Fall gibt es keine Verschiebung der Knotenpunkte und der Druck schneidet dort zu jedem Zeitpunkt die x-Achse. Bei einer wandernden Welle sind die Nulldurchgänge örtlich nicht konstant über der Zeit  $t$ , was sich ebenfalls im Bereich des ersten Knotenpunkts in Abbildung 5 zeigt. Somit wandert die Welle von 0 bis 100 mm. Im Gegensatz hierzu erkennt man für den zweiten Knotenpunkt, dass dort  $\tilde{p}$  zu jedem Zeitpunkt die x-Achse schneidet. Das bedeutet, dass die Welle in diesem Bereich steht und so eine Überlagerung von einer stehenden und wandernden Welle im System stattfindet.

Das im stark gedämpften Bereich des Modells die Welle wandert wird in Abbildung 6 deutlich. Diese zeigt die Druckverteilungen im System für drei verschiedene Zeit-



**Abbildung 5:**  $\tilde{p}$  entlang der Länge des Rohrs bei Anregung der zweiten Eigenfrequenz von  $f \approx 2018\text{Hz}$  für verschiedene Zeitpunkte  $\omega t$ . Die schwarzen vertikalen Linien stellen die Knotenpunkte des ungedämpften Systems bei der zweiten Eigenfrequenz dar.

punkte. Bei  $\omega t = 0$  erkennt man die für die zweite Eigenfrequenz typische, symmetrische Druckverteilung, mit zwei Knotenpunkten und einem Schwingungsbauch. Diese Druckverteilung, nur mit umgekehrten Vorzeichen, ist auch für  $\omega t = \pi$  erkennbar. Bei  $\omega t = \pi/2$  ist dagegen eine unsymmetrische Verteilung des Drucks zu erkennen. Im Bereich des gedämpften Gebiets ist ein kleinerer Schwingungsbauch zu erkennen, wohingegen im schwach gedämpften Bereich die Druckverteilung annähernd null ist. Bei einer stehenden Welle ist für  $\omega t = \pi/2$  die komplette Druckverteilung nahezu null, wie es auch im annähernd schallharten Bereich der Fall ist. Im stark gedämpften Bereich erkennt man hingegen, dass der, farblich rote, Schwingungsbauch von der Anregung ausgehend, in die Mitte des Rohrs wandert.



**Abbildung 6:** Druckverteilungen im Modell für verschiedene Zeitpunkte  $\omega t$  bei einer Anregung von  $f = 2010\text{Hz}$ .

Die Phase  $\Phi$  kann Auskunft darüber geben, wie sich eine Welle fortbewegt, um so auch Rückschlüsse des Einflusses der Randbedingungen auf die Schallausbreitung zu zulassen. Die Ergebnisse zeigen, dass sich eine lokale Verteilung des Realteils der Impedanz  $\Re(\tilde{Z}_{\text{Wand}})$  auf die Schallausbreitung auswirkt, was sich anhand von  $\Phi$  zeigen lässt. Vergleicht man die Ergebnisse von Variante C und D für die Phase  $\Phi$  kann festgehalten werden, dass eine überlagerte Wellenform im Rohr nur bei Variante D auftritt. Anhand von Abbildung 5 wird auch ersichtlich, dass eine lokale Veränderung der Impedanz sich lokal an

der Stelle auch auf die Schallausbreitung auswirkt. So tritt beim zweiten Knotenpunkt der zweiten Eigenfrequenz, bei dem auch eine höhere Impedanz formuliert wurde als beim ersten, nahezu keine Verschiebung der Nulldurchgänge auf, was im Fall des verwendeten Rohrs nur mit der Impedanzverteilung nach Variante D erreicht wurde. Bei den hier vorgestellten Beispielen handelt es sich nur um ausgewählte Zahlenwerte, um den Einfluss des Orts der Impedanz zu verdeutlichen, jedoch nicht um Parameterwerte der Impedanz im menschlichen VT.

## Ausblick

Der Artikel hat gezeigt, wie eine lokal unterschiedliche Impedanzverteilung das Ausbreitungsverhalten von Schallwellen beeinflusst. Aufbauend auf diesen Beobachtungen wird die Untersuchung des Einflusses des Ortes der Dämpfung auch auf komplexere Geometrien, den Imaginärteil der Impedanz  $\Im(\tilde{Z})$  und auf die Unterdrückung von bestimmten Eigenfrequenzen ausgeweitet. Zudem muss die Art der Impedanzverteilung an das Vorbild des menschlichen Vokaltrakts angepasst werden um die Realität möglichst nah abzubilden.

## Literatur

- [1] Fant, G.: Acoustic theory of speech production. Mouton & Co., The Hague, 1960, pp.113ff
- [2] Fleischer, M., Pinkert, S., Mattheus, W., Mainka, A., and Mürbe, D.: Formant frequencies and bandwidths of the vocal tract transfer function are affected by the mechanical impedance of the vocal tract wall. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, **14**(2014),pp.719-733
- [3] Pompino-Marschall, B.: Einführung in die Phonetik. Walter de Gruyter, 2003, pp.87ff
- [4] Marburg, S., Nolte, B.: Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods. Springer, 2008, pp.1-37
- [5] Kaltenbacher, M.: Computational Acoustics. Springer International Publishing, 2017, pp.18
- [6] Anderssohn, R.: Globale Abschätzung akustischer Wandadmittanzen in Innenräumen mittels inverser Verfahren, Technische Universität Dresden, 2013
- [7] Retka, S., Hervella-Nieto, L., Marburg, S.: Comparison of pressure and displacement formulations for finite elements in linear time-harmonic acoustics. *Computers and Structures*, **151**(2015), pp.49-57
- [8] Logg, A., Mardal, K.-A., Wells, G. N., et al.: Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. Springer, 2012