

Longitudinal One-Way Wave Equation

O. Bschorr¹, H.-J. Raida²

¹Aeroakustik Stuttgart ²mail@hjraida.de

Zusammenfassung

Die in der Geoseismik benutzten Gleichungen für die longitudinale P-Welle und die transversale S-Welle gründen auf der klassischen Kräfte-Bilanz. Mathematisch handelt es sich um partielle Differentialgleichungen (PDG) 2. Ordnung. Diese gelten als „Two-way wave equation“ da sie sowohl die hin- als auch die rückläufige Welle als Lösung enthalten. Diese inhärente Zweideutigkeit ist der Grund, dass bei numerischer FE- bzw. FD- Berechnung einer Laufwelle rückwärts gerichtete Phantom-Strahlen auftreten. Um diese Störungen auszuschalten gibt es eine große Anzahl von Hilfsgleichungen, zusammengefasst unter dem Begriff „One-way wave equation“. – In dieser Arbeit wird das Impedanz-Theorem direkt und ohne weitere Annahmen als Wellengleichung interpretiert. Als eine PDG 1. Ordnung liefert diese eine Laufwelle mit eindeutiger Laufrichtung. Dagegen erfasst die doppeldeutige PDG 2. Ordnung die richtungsneutrale Stehwelle.

Einleitung

Seismische Wellen dienen dazu, das Erdinnere zu erforschen und Bodenschätze aufzuspüren. Die zu diesem Zweck benutzten Wellengleichungen beruhen auf dem klassischen Kräftegleichgewicht und sind partielle Differentialgleichungen (PDG) 2. Ordnung. Diese enthalten mit dem quadratischen Geschwindigkeitsterm $c^2 = (+c)^2 = (-c)^2$ gleichzeitig und gleichwertig sowohl die hin- und auch die rücklaufende Welle und zählen ob dieser Doppeldeutigkeit als „Two-way wave equation“. Bei analytischer Rechnung kann über das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{c^2} = +/-c$ nachträglich der relevante Lösungsteil identifiziert und der irrelevante ausgeschieden werden, nicht so bei der numerischen Rechnung via Finite-Element FE-bzw FD-Verfahren. Hier verursacht die Zweideutigkeit irreguläre Phantom-Effekte. Zu deren Ausschaltung wurden unter dem Sammelbegriff „One-way wave equation“ eine Vielzahl heuristischer Hilfsgleichungen entwickelt. In einem neueren Versuch wird der überflüssige Wellenteil via Antischall ausgelöscht [1]. Diese Eingriffe verletzen mehr oder weniger die klassische Grundgleichung und setzen sie im Extremfall beim Einsatz von parabolischen Gleichungen gänzlich außer Kraft.

Der großen wirtschaftlichen Bedeutung der seismischen Prospektion entsprechend, gibt zu der Problematik „One/Two-way wave equation“ neben der Fachliteratur auch eine Vielzahl von Patenten, In [2] und [3] sind dazu umfangreiche Quellenverzeichnisse enthalten. Gerade die Vielzahl und die bis heute andauernden Lösungsversuche sind ein Indiz für die unbefriedigende Situation.

Das Impedanz-Theorem hat Heaviside in 1886 eingeführt. Ursprünglich für die Elektrodynamik verfasst, wurde das Konzept unmittelbar von der Akustik übernommen und ist ein unverzichtbares Hilfsmittel auch in der Seismik geworden. Identisch mit der Impedanz-Formel ist das sog. Ohmsche Gesetz der Akustik.

Ziel der Arbeit ist, das akustische Impedanz-Theorem direkt und hypothesenfrei in eine für die longitudinale Laufwelle gültige „One-way wave equation“ zu überführen. Dieser Zugang erweist sich äquivalent dem hypothetischen Konzept einer Impulsbilanz [4,5]. Ausgehend vom homogenen Festkörper mit geradliniger Wellenausbreitung wird auch der bei Inhomogenität gekrümmte Wellengang für eine Nachprüfung bereitgestellt.

Longitudinalwelle im homogenen Medium

Ein verlustloses, homogenes, isotropes Kontinuum mit der Dichte ρ [kg/m³] und dem Elastizitätsmodul E [Pa] hat die longitudinale Wellengeschwindigkeit c [m/s] und die spezifische Kenn-Impedanz $z = \rho c$ [kg/m²s = sPa/m].

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (1)$$

$$z = \rho c = \sqrt{E\rho} \quad (2)$$

In einer longitudinalen, planen Laufwelle bestimmt die Impedanz z die lokale Proportionalität von Schalldruck $p = p(x,t)$ [Pa] und Schnelle $v = v(x,t)$ [m/s].

$$z = \rho c = p/v \quad (3)$$

Diese Beziehung wird auch als das Ohmsche Gesetz der Akustik bezeichnet. Dabei gelten die in **Tab. 1** dargestellten Entsprechungen.

	<u>Elektrik</u>	<u>Akustik</u>
Widerstand	R [V/A]	$z = \rho c$ [sPa/m]
Strom	J [A]	$v = s^\circ$ [m/s]
Spannung	U [V]	$p = Es'$ [Pa]
Impedanz-Theorem	$R = U/J$	$\rho c = p/v$
Akust. Ohm-Gesetz	$RJ - U = 0$	$\rho c v - p = 0$

Tabelle 1 Impedanz-Theorem in Elektrik und Akustik, Ohmsches Gesetz der Akustik.

Eine elektrische Spannung U bewirkt der Ohm-Gleichung gemäß in einem Leiter mit dem Widerstand R einen Stromfluss $J = U/R$. Analog dazu induziert ein lokaler Schalldruck p bei der Impedanz $z = \rho c$ eine lokale Schnelle $v = p/\rho c$. Die Umstellung der Impedanzgleichung

$$\rho c v - p = 0 \quad (4)$$

erinnert an das in [4] eingeführte, hypothetische Gleichgewicht von kinetischem $\rho c s^\circ$ und potentielltem EVs Impulsfluss [Hy/s m²]

$$\rho c s^\circ - EVs = 0 \quad (5)$$

Im Anhang ist die Äquivalenz von (4) und (5) bewiesen.

Im homogenen Medium hat eine in +x-Richtung laufende plane Longitudinalwelle der (Kreis)Frequenz ω [rad/s], der Amplitude a [m] die Auslenkung $s = s(x,t)$ [m] (6), die Schnelle v (7) und den Druck p (8).

Mit der Vereinbarung, dass mit $c = \{+c, -c\}$ beide Wellenrichtungen dem Reziprozitäts-Theorem [6] entsprechend zusammengefasst sind, gilt die Schreibweise

$$s = s(x,t) = a \sin \omega(t - x/c) \quad c = \{+c, -c\} \quad (6)$$

$$v = \partial s / \partial t = s^\circ = a \omega \cos \omega(t - x/c) \quad (7)$$

$$p = E \partial s / \partial x = Es' = +/ - E a \omega / c \cos \omega(t - x/c) \quad (8)$$

Diese Beziehungen sowie die Identität $E = \rho c^2 (1')$ in die Impedanzformel (4) eingesetzt ergeben eine PDG 1. Ordnung und damit die im homogenen Medium maßgebende longitudinale Wellengleichung

$$s^\circ - cs' = 0 \quad c = \{+c, -c\} \quad (9)$$

Diese Gleichung steht in Konkurrenz zur konventionellen, ebenfalls auf den homogenen Longitudinalwellenleiter angewandte PDG 2. Ordnung

$$s^{\circ\circ} - c^2 s'' = 0 \quad (10)$$

Ersichtlich an dem Term $c^2 = (+c)^2 = (-c)^2$ ist weder die in $+c$ -Richtung hin- noch die $-c$ -Richtung rücklaufende Welle präferiert, so dass als Lösung nicht die gerichtete Laufwelle, sondern die richtungsneutrale Stehwelle anzusetzen ist:

$$s_{\pm}(x,t) = a_{\pm} \sin \omega t \cos \omega x / c \quad (11)$$

Dazu wird an das Additionstheorem erinnert, wonach die Superposition zweier entgegengesetzter Laufwellen eine Stehwelle ergibt und umgekehrt.

$$2 \sin \omega t \cos \omega x / c \leftrightarrow \sin \omega(t - x/c) + \sin \omega(t + x/c) \quad (12)$$

Longitudinalwelle bei 1D-Inhomogenität

Es wird ein zylindrischer Wellenleiter mit dem Durchmesser $D \leq \lambda/2$ [m] und der Koordinate $0 \leq x \leq \infty$ [m] betrachtet. Dieser habe den Verlauf von Elastizitätsmodul $E = E(x)$, Dichte $\rho = \rho(x)$ und die longitudinale Wellengeschwindigkeit $c = c(x) = \sqrt{E/\rho}$. Eine in $+x$ -Richtung laufende Welle der Frequenz ω und der Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ habe die Auslenkung $s = s(x,t)$ und als Feldvariablen die Schnelle $v = s^\circ = i\omega s$ und den Schalldruck $p = (Es)'$. Die Werte v und p in die skalare Impedanzgleichung $\rho c v - p = 0$ (4) eingesetzt liefern die für 1D-Inhomogenität zutreffende PDG 1. Ordnung:

$$\rho c i\omega s - (Es)' = 0 \quad ()' = \partial()/\partial x \quad (13)$$

Im Sinne einer linearen Theorie wird auf schwache Inhomogenität eingeschränkt:

$$\lambda \nabla E/E \rightarrow 0 \quad \lambda \nabla \rho/\rho \rightarrow 0 \quad (14)$$

Gl. (13) durch den Ausdruck (Es) dividiert ergibt zusammen mit dem Lokaltäts-Theorem die Zwischenform (15) und mit der Identität $(Es)'/Es = (\ln Es)'$ die Integrallösung (16)

$$i\omega/c - (Es)'/Es = 0 \quad (15)$$

$$i\omega \int_0^x \frac{dx}{c} - \ln Es = C \quad (16)$$

Die Integrationskonstante C durch die Anfangswerte E_0 und s_0 bei $x = 0$ ersetzt und auf die Zeitgleichung erweitert, ergibt die Auslenkung $s = s(x,t)$ der Longitudinalwelle der (Kreis)Frequenz ω [rad/s] in Abhängigkeit der inhomogenen Materialparameter $E = E(x)$ und $c = c(x)$, sic

$$s = s_0(E_0/E) \exp i\omega(t - \int_0^x \frac{dx}{c}) \quad (17)$$

Das Integral gibt die Laufzeit τ [s] der Welle vom Start bei $x = 0$ bis zum Punkt x .

Setzt man zur Kontrolle die aus (17) gebildeten Ableitungen s°, s' bzw. $(Es)'$

$$s^\circ = i\omega s \quad (Es)' = E's + Es' = (i\omega/c) s \quad (18)(19)$$

in die Ausgangsgleichung (17) ein, so ergibt sich Übereinstimmung. Erwartungsgemäß vereinfacht sich im Sonderfall konstanter Wellengeschwindigkeit $c = c_0 = \text{const.}$

$$s = s_0(E_0/E) \exp i\omega(t - x/c_0) \quad (20)$$

Longitudinalwelle bei 3D-Inhomogenität

Koordinaten. Modellannahmen. Festgelegt in den globalen Koordinaten $\mathbf{x} = \{x_i, y_j, z_k\}$ bestehen in einem Feldpunkt $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}(\mathbf{x})$ die ortsabhängigen Materialparameter $\rho = \rho(\mathbf{x})$ und $E = E(\mathbf{x})$. Im Einklang mit dem Lokaltäts-Axiom ist damit auch die Wellengeschwindigkeit $c(\mathbf{x})$ ortsabhängig

$$c(\mathbf{x}) = \sqrt{[E(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})]} \quad (21)$$

Es wird wieder von einem reellen, also verlustfreien E -Wert ausgegangen und im Sinne einer linearen Theorie auf eine schwache Inhomogenität gemäß (14) eingeschränkt. Bei Inhomogenität geht die geradlinige Wellenausbreitung verloren. Für die Verallgemeinerung auf gekrümmte Wellen werden neben den globalen Koordinaten \mathbf{x} zusätzlich die lokalen, im betrachtenden Feldpunkt $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}(\mathbf{x})$ fixierten Koordinaten $\{\xi, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ eines begleitenden Dreibeins eingeführt ($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ [-] = einsnormierte, orthogonale Vektoren, ξ [m] = Laufkoordinate in Wellenrichtung \mathbf{t})

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{c}/c \quad (22)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{t}}{|\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{t}|} = \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} \quad (23)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (24)$$

Der Tangentenvektor \mathbf{t} zeigt in Wellenrichtung \mathbf{c} (da \mathbf{t} nur als Vektor auftritt, besteht keine Verwechslung mit der skalaren Zeit t) Eine Richtungsänderung $\nabla \mathbf{t}$ entspricht nach der Frenet-Theorie für Raumkurven einer Bahnkrümmung mit Radius R [m]

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{t} = 1/R = \mathbf{n}/R \quad (25)$$

Danach legt der vektorielle Krümmungsradius $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ die Normalen-Richtung \mathbf{n} fest und die lokale Schallbewegung erfolgt in der von dem Tangenten-Vektor \mathbf{t} sowie dem Normalen-Vektor \mathbf{n} aufgespannten sog. Schmiegungeebene. Die dazu senkrechte Binormale \mathbf{b} ist kräftefrei.

Wellenkrümmung. Die Krümmung $1/R$ bzw. der Krümmungsradius R einer Welle selbst wird letztlich durch das Snellius-Gesetz bestimmt:

$$\sin \alpha_1/c_1 = \sin \alpha_2/c_2 = \sin \alpha/c = \text{const.} \quad (26)$$

Danach ändert sich an der Kontaktfläche von zwei Leitern mit unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten c_1 und c_2 der von der Lotrichtung \mathbf{e} aus gemessene Einfallswinkel α_1 nach α_2 . Offensichtlich liegen die Lotrichtung \mathbf{e} , die Ein- und Ausfallrichtungen \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 in einer Ebene (**Abb. 1**).

Der Wellenverlauf in einem inhomogenen Medium wird auf das Original von **Abb. 1** zurückgeführt und der Geschwindigkeitssprung $c_1 \rightarrow c_2$ ersetzt durch einen infinitesimalen Sprung dc entsprechend **Abb. 2**. Der lokale Lotvektor \mathbf{e} ist durch den Geschwindigkeitsgradienten ∇c im betrachteten Feldpunkt $\mathbf{\Theta}$ festgelegt:

$$\mathbf{e} = \nabla c / |\nabla c| \quad (27)$$

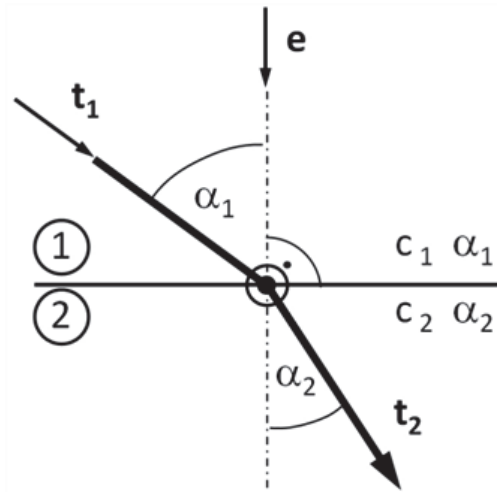


Abbildung 1: Ein Schallstrahl der Richtung \mathbf{t}_1 erfährt an der Kontaktfläche zweier homogener Leiter mit den unterschiedlichen Wellengeschwindigkeit c_1 und c_2 eine Snellius-Wellenbrechung von Winkel α_1 auf Winkel α_2 . Der Lot-Vektor \mathbf{e} ist senkrecht zur Kontaktfläche.

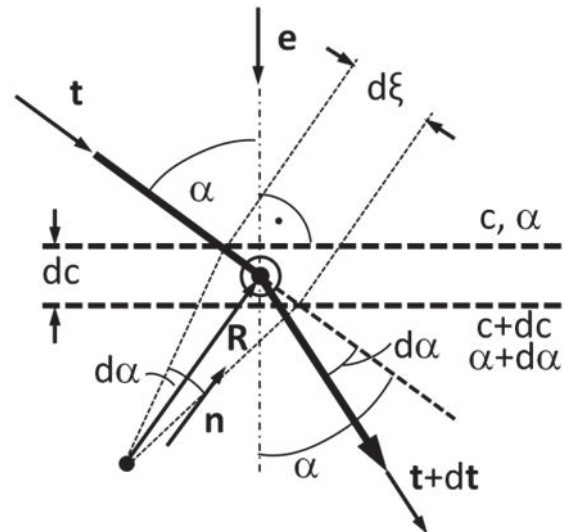


Abbildung 2: Die durch den Tangenten-Vektoren \mathbf{t} und den Normalen-Vektor \mathbf{n} aufgespannte Schmiegungeebene entspricht der Zeichnungsebene. In einem Feldpunkt \mathbf{O} besteht der Geschwindigkeitsgradient ∇c und bestimmt die Lot-Richtung $\mathbf{e} = \nabla c / |\nabla c|$. Ein Schallstrahl der Richtung \mathbf{t} erfährt in einem inhomogenen Wellenleiter mit dem Gradienten ∇c auf dem Weg $d\xi$ die Geschwindigkeitsänderung $dc = \mathbf{t} \cdot \nabla c \, d\xi$ und verursacht nach dem differentiellen Snellius-Brechungsgesetz eine Richtungsänderung $d\alpha = \operatorname{tg} \alpha \, dc/c$. Eine Winkeländerung $d\alpha$ über einem Wellenweg $d\xi$ entspricht einem Krümmungsradius R .

Damit sind auch bei inhomogenem Wellenleiter die ein- und ausfallenden Wellenrichtung und das Lot \mathbf{e} koplanar und liegen in der Schmiegungeebene. Der inhomogene c -Verlauf lässt sich als Folge von infinitesimalen Geschwindigkeitsprüngen dc darstellen. Mit dem Übergang $c_2 - c_1 \rightarrow dc$ und $\alpha_2 - \alpha_1 \rightarrow d\alpha$ lautet das differentielle Snellius-Gesetz

$$\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin(\alpha+d\alpha)}{c+dc} = \text{const} \quad (28)$$

wonach eine Geschwindigkeitsänderung dc an einem Strahl mit Einfallswinkel α die Richtungsänderung $d\alpha$ verursacht

$$d\alpha = \operatorname{tg} \alpha \, dc/c \quad (29)$$

Ein Schallstrahl erfährt (**Abb. 2**) bei einem Gradienten ∇c über den Strahlweg $\mathbf{t} d\xi$ die Geschwindigkeitsänderung

$$dc = \mathbf{t} \cdot \nabla c \, d\xi = |\nabla c| \cos \alpha \, d\xi \quad (30)$$

und damit nach (29) die differentielle Winkeländerung $d\alpha$

$$d\alpha = |\nabla c|/c \sin \alpha \, d\xi \quad (31)$$

Nach (31) entspricht eine Richtungsänderung $d\alpha$ entlang einem Weg $d\xi$ einer Krümmung

$$1/R = d\alpha / d\xi. \quad (32)$$

Damit erfährt eine Schallwelle aus Richtung \mathbf{t} am Feldpunkt \mathbf{O} infolge des lokalen Gradienten $\nabla c/c$ eine Wellenbrechung entsprechend der Krümmung $1/R$

$$1/R = |\nabla c| \sin \alpha / c \quad (33)$$

Im Anhang findet sich zusätzlich die stringente, vektorielle Berechnung der Krümmung. Mit $\alpha = \text{angle } \mathbf{t}, \mathbf{e}$ und $\text{angle } \mathbf{n}, \mathbf{e} = \pi/2 - \alpha$ stimmen die Ergebnisse (33) und (51) überein.

Wellengleichung. Die relevanten Feldgrößen sind die vektorielle, linearelastische Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ [m], die Schnelle $\mathbf{s}^\circ = \mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$ [m/s], der Gradient $\nabla \mathbf{s}$ [-] und der Gradient $\nabla \mathbf{s}$ [-] und der Druck $\mathbf{p} = \nabla \mathbf{E} \mathbf{s}$ [Pa] gemessen in der feststehenden Koordinate \mathbf{x} und der Zeit t [s].

Zusammen mit der vektoriellen Impedanz $\mathbf{z} = \rho \mathbf{c}$ damit die Grundgleichung (4) erweitert konstituiert die für das inhomogene Medium maßgebende Wellengleichung.

$$\rho \mathbf{c} \mathbf{s}^\circ - \nabla(\mathbf{E} \mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (34)$$

Die skalare Multiplikation mit dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{c} ergibt die Zwischenform

$$\rho \mathbf{c}^2 \mathbf{s}^\circ - \mathbf{c} \cdot \nabla(\mathbf{E} \mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (35)$$

und die Division mit der Identität (1) liefert die für den inhomogenen Wellenleitern zutreffende Ausgangsform: $(\nabla \mathbf{E} / \mathbf{E} = \nabla(\ln \mathbf{E}))$

$$\mathbf{s}^\circ - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{s} \nabla(\ln \mathbf{E}) + \nabla \mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (36)$$

Bei einer Longitudinalwelle verläuft die Auslenkung \mathbf{s} per definitionem in \mathbf{t} -Richtung, also

$$\mathbf{s} = s \mathbf{t} \quad (37)$$

$$\mathbf{s}^\circ = (s \mathbf{t})^\circ = s^\circ \mathbf{t} + s \mathbf{t}^\circ = s^\circ \mathbf{t} + s |\mathbf{t}^\circ| \mathbf{n} \quad (38)$$

$$\nabla \mathbf{s} = \nabla(s \mathbf{t}) = (\nabla s) \mathbf{t} + s \nabla \mathbf{t} \quad (39)$$

Diese Ausdrücke in (36) eingesetzt, ergeben die Vektor-Gleichung (40) bestehend aus den in der Schmiegungeebene liegenden \mathbf{t} - und \mathbf{n} -Komponenten (41)(42)

$$(s^\circ \mathbf{t} + s \mathbf{t}^\circ) - \mathbf{c} \mathbf{t} \cdot (s \mathbf{t} \nabla(\ln \mathbf{E}) + (\nabla s) \mathbf{t} + s \nabla \mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (40)$$

$$\mathbf{t}\text{-Komponente: } \mathbf{t} [s^\circ - \mathbf{c} \mathbf{t} \cdot \nabla(\ln \mathbf{E}) + \mathbf{c} \mathbf{t} \cdot \nabla s] = \mathbf{0} \quad (41)$$

$$\mathbf{n}\text{-Komponente: } s \mathbf{t}^\circ - s \mathbf{c} \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{t} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{t}^\circ - \mathbf{c} R^{-1} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Die \mathbf{t} -Komponente betrifft das Gleichgewicht in \mathbf{t} -Richtung und liefert mit der Identität $\mathbf{t} \cdot \nabla() = d()/d\xi$ und der Setzung $d()/d\xi = ()'$, also mit

$$\mathbf{t} \cdot \nabla s = ds/d\xi := s' \quad (43)$$

$$\mathbf{t} \cdot \nabla (\ln E) := (\ln E)' \quad (44)$$

die skalare Wellengleichung als Funktion der in der Wellenrichtung \mathbf{t} verlaufender, im allgemeinen Fall gekrümmten Koordinate ξ :

$$s'' - c \left((\ln E)' s + s' \right) = 0 \quad (45)$$

Wird die Schnelle $s'' = i\omega s$ ersetzt, resultiert mit $s'/s = (\ln s)'$ die Wellengleichung

$$i\omega/c - (\ln E)' + (\ln s)' = 0 \quad (46)$$

und die zu (17) analoge Lösung in der Dreibein-Koordinate ξ

$$s(\xi, t) = s_0(E_0/E) \exp i\omega \left(t - \int_0^\xi \frac{d\xi}{c} \right) \quad (47)$$

Für den Sonderfall einer konstanten Wellengeschwindigkeit $c = c_0 = \text{const.}$ vereinfacht sich das Integral in (47) und ergibt die Lösung

$$s = s_0(E_0/E) \exp i\omega(t - \xi/c_0) \quad (48)$$

und kann mit $x \rightarrow \xi$ als Verallgemeinerung von geradlinigem (17) auf gekrümmten Wellenverlauf interpretiert werden.

Anhang I: Vektoriell Snellius-Gesetz

Strahlenkrümmung im inhomogenen Wellenleiter. Ausgangspunkt ist mit der Setzung $\sin \alpha \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}$ die vektorielle Snellius-Gleichung

$$\sin \alpha / c = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} / c = \text{const} \quad (49)$$

Die Differentiation der Snellius-Formel nach $\nabla[\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} / c] = \mathbf{0}$ liefert in \mathbf{t} -Richtung

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \nabla[\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} / c] &= \mathbf{t} \cdot [\nabla \mathbf{t} - \mathbf{t} \nabla c / c] \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow [\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{t} - \nabla c / c] \cdot \mathbf{e} &= [\mathbf{n} / R - \nabla c / c] \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (50)$$

Aus [...] = 0 folgt die von einem Geschwindigkeitsgradienten $\nabla c / c$ verursachte Wellenkrümmung $1/R$

$$1/R = \mathbf{n} \cdot \nabla c / c \quad \rightarrow \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \nabla c / c \quad (51)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (33) überein.

Anhang II: Identität von – longitudinalem – Impedanz-Theorem und Impulsleichgewicht

Zugrunde liegt ein homogener Festkörper. Für diesen Fall lauten die skalare Impedanz-Gleichung (52) und das tensorielle Impulsleichgewicht (53)

$$\rho c s'' - p = 0 \quad \rightarrow \quad \rho c s'' - E s' = 0 \quad (52)$$

$$\rho c s'' - E \nabla s = 0 \quad (53)$$

Auslenkung s , Schnelle s' und Wellengeschwindigkeit c verlaufen in Tangentenrichtung \mathbf{t} , also

$$\mathbf{c} = c \mathbf{t} \quad \mathbf{s} = s \mathbf{t} \quad s'' = s'' \mathbf{t} \quad \nabla s = \nabla s \mathbf{t} = s' \mathbf{t} \mathbf{t} \quad (54)$$

Damit schreibt sich das tensorielle Impulsleichgewicht

$$[\rho c s'' - E s'] \mathbf{t} \mathbf{t} = 0 \quad (55)$$

und der [...] -Ausdruck entspricht dem skalaren Impedanz-Theorem (52) für das homogene Medium.

Anhang III: Faktorisierung

In der Literatur wird immer wieder die Faktorisierung

$$(\partial^2/\partial x^2 - c^2 \partial^2/\partial t^2) s = (\partial/\partial x - c \partial/\partial t) (\partial/\partial x + c \partial/\partial t) s = 0 \quad (56)$$

$$\left(\begin{matrix} A \\ \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} B \\ \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} C \\ \end{matrix} \right) = 0 \quad (56')$$

der klassischen, für den homogenen Wellenleiter gültigen Gleichung (A) angeführt [8]. Danach bestehen insgesamt drei voneinander unabhängige Wellengleichungen:

$$A: \quad (\partial^2/\partial x^2 - c^2 \partial^2/\partial t^2) s = 0 \quad (57)$$

$$B: \quad (\partial/\partial x - c \partial/\partial t) s = 0 \quad (58)$$

$$C: \quad (\partial/\partial x + c \partial/\partial t) s = 0 \quad (59)$$

Eine partielle Differential-Gleichung (PDG) n-ter Ordnung hat n voneinander unabhängige Lösungen. Die PDGs 1. Ordnung (B) und (C) haben mit $n = 1$ je nur eine Lösung s_B und s_C und beschreiben Laufwellen mit einer eindeutigen Laufrichtung: ($k = \omega/c$ [rad/m] = Wellenzahl). Die beiden in $+x$ und $-x$ laufenden Wellen s_B und s_C bestätigen das Reziprozitäts-Theorem, wonach auch bei Vertauschung von Sender und Empfänger der Wellenpfad erhalten bleibt.

$$B: \quad s_B = s_{0B} \sin(\omega t - kx) \quad (60)$$

$$C: \quad s_C = s_{0C} \sin(\omega t + kx) \quad (61)$$

Gleichung (A) hat als PDG 2. Ordnung (A) $n = 2$ unabhängige Lösungen, die gleichzeitig und gleichwertig auch die beiden entgegengesetzt gerichteten $+/-c$ -Laufwellen enthalten. Diese Forderungen erfüllt die Stehwelle

$$A: \quad s_A = s_{0A} (\sin \omega t \cos kx +/- \cos \omega t \sin kx) \quad (62)$$

Wie sich aus der Überlagerung von entgegengesetzt gerichteten Laufwellen (B) und (C) eine Stehwelle (A) bildet, so gilt auch die Umkehrung.

Die „One/Two-way“-Problematik beruht darauf, dass die bei der seismischen Prospektion vorliegende Laufwelle (B) mit der für Stehwellen zutreffenden „Two-way wave equation“ (A) berechnet wird.

Literatur, Vorarbeiten

- [1] K. Maeda, T. Colonius: A source term approach for generation of one-way acoustic waves in the Euler and Navier-Stokes equation. Wave Motion. Acc. 24.8.2017.
- [2] D. A. Angus: The One-Way Wave Equation: A Full-Waveform Tool for Modeling Seismic Body Wave Phenomena. Surv. Geophys (2014) 35:359 – 393.
- [3] Halliburton Energy Services: Hybrid one-way and full-way wave equation migration. US-Patent Nr. 8 116 168 (2012)
- [4 / 5] O. Bschorr, DAGA Fortschritte in der Akustik: [4] 2014, S. 80: Deviationswellen im Festkörper. [5] 2016, S. 270: Wellen im anisotropen Festkörper nach dem Impulskonzept.
- [6] H.-J. Raida, O. Bschorr, Konventionelles Kräftegleichgewicht versus. hypothetisches Impulsleichgewicht, DAGA Fortschritte der Akustik 2018 .S. 828 – 831
- [7] O. Bschorr, H.-J. Raida, One-Way Wave Equation Derived from Impedance Theorem, Acoustics 2020, 2(1), 164-170; <https://doi.org/10.3390/acoustics2010012>
- [8] E. Baysal et al: A two-way nonreflecting wave equation. Geophys.-Vol. 49. Nr. 2 (Febr. 1984) p. 132 – 141