Transversal One-Way Wave Equation

O. Bschorr [1], H.-J. Raida [2]

[1] Aeroakustik Stuttgart [2] mail@hjraida.de

Zusammenfassung

Die klassische Wellengleichung gilt in der Seismik als „two-way wave equation“, da diese mit der quadratischen Wellengeschwindigkeit $c^2 = (+c)^2 = (-c)^2$ beide Wellenrichtungen umfasst. Bei numerischen FE-Rechnungen führt diese Zweideutigkeit zu irregulären rückwärtsgerichteten Phantom-Wellen. Zur Ausschaltung dieser Stör-Effekte wurden unter dem Titel „One-way wave equation“ die unterschiedlichsten Hilfsgleichungen aufgestellt, ohne dass sich ein Verfahren durchsetzen konnte. - In dieser Arbeit wurde das für transversale Laufwellen gültige Impedanz-Theorem hypothesenfrei und ohne zusätzliche Annahmen einmal in vereinfachter Skalarform A und zusätzlich in stringenter Vektorform B mit der vektoriellen, transversalen Auslenkung. **s** als Feldvariable umgeschrieben: ($s = \sqrt{\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}}$)

A: $s° - c\,s' = 0$ B: $\mathbf{s° - c \times rot\, s = 0}$

Beide Gleichungen sind synonym und liefern als partielle Differentialgleichung (PDG) 1. Ordnung eine Laufwelle mit vorgebbarer Wellenrichtung. Die doppeldeutige PDG 2. Ordnung ist für stehende Wellenfelder zuständig.

Einleitung

Eine Differential-Gleichung n-ter Ordnung hat insgesamt n voneinander unabhängige Lösungen. Bei der klassischen PDG-Wellengleichung 2. Ordnung mit n = 2 sind dies die hin- und rücklaufende Welle, deswegen die Bezeichnung „Two-way wave equation.“ Bei einer analytischen Lösung kann die Zweideutigkeit über das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{(c^2)} = +/-c$ auch nachträglich geklärt werden. Bei numerischen FE-Rechnungen zur seismischen Prospektion entfällt eine solche Wahlmöglichkeit und es treten irreguläre Reflexions-Effekte auf. Zu deren Behebung wurden unter dem Titel „One-way wave equation“ eine Vielzahl von Hilfsgleichungen entwickelt. Ein Ansatz [1] aus 2017 verwendet die Antischall-Technik, um damit den irregulären, rückwärts gerichteten Wellenteil auszulöschen. Durch jeden dieser Eingriffe werden die klassischen Grundgleichungen mehr oder weniger verletzt. Der wirtschaftlichen Bedeutung entsprechend gibt es zu der Problematik „One/two-way wave equation“ neben der Fachliteratur auch einen umfangreichen Patent-Bestand. Dazu sind die Übersichten [2] und [3] angeführt, die beide ein größeres Quellenverzeichnis enthalten. Die Vielzahl der bis heute andauernden Lösungsversuche ist ein Indiz für die unbefriedigende Situation.

Das Impedanz-Theorem hat 1886 Heaviside eingeführt. Ursprünglich für die Elektrodynamik konzipiert, wurde es unmittelbar von der Akustik übernommen und ist auch ein unverzichtbares Mittel in der Seismik geworden. Im Besonderen gelang es [4], das Impedanz-Theorem als longitudinale Wellengleichung zu identifizieren. Dieser Lösungsweg wird hier auf die Transversalwelle übertragen.

Transversalwelle nach Impedanz-Theorem

Vorgegeben ist ein homogener Festkörper in den ortsfesten Koordinaten $\mathbf{x} = \{x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}\}$. Es wird vereinbart, dass sich eine plane, transversale Laufwelle mit der Koordinate x [m] in **i**-Richtung ausbreitet und die transversalen Wellenausschläge **s**(x,t) [m] in **j**-Richtung verlaufen. (Im Nachgang findet sich die verallgemeinerte Herleitung.) Bei der Wellengeschwindigkeit c [m/s], der Amplitude s_0 [m] und der Frequenz ω [rad/s] hat eine solche Welle die vektorielle (1) und die skalare Gleichung (2)

$$\mathbf{s}(x,t) = \mathbf{s} = s_0\,\mathbf{j}\,\sin\omega(t - x/c) = s\,\mathbf{j} \tag{1}$$

$$s(x,t) = s = s_0 \sin\omega(t - x/c) \tag{2}$$

Bei homogenem Wellenleiter besteht geradlinige Wellenrichtung **i** und konstante Polarisationsrichtung **j.** Zirkular polarisierte Wellen lassen sich über eine komplexe Amplitude auf die beiden eigenständigen **j-** und **k**-Komponenten zurückführen.
Physikalisch ist der homogene, isotrope und verlustfreie Wellenleiter durch seine Dichte ρ [kg/m³] und den Schermodul G [Pa] festgelegt. Daraus folgen die transversale Wellengeschwindigkeit c [m/s] und die spezifische Kenn-Impedanz z [kg/m²s].

$$c = \sqrt{(G/\rho)} \tag{3}$$

$$z = \rho c = \sqrt{(G\rho)} \tag{4}$$

Die Kennimpedanz z bestimmt definitionsgemäß das lokale Verhältnis von Scherspannung $\tau = \tau(x,t)$ [Pa] und Schnelle $v = v(x,t)$ [m/s] in einer transversalen Laufwelle.

$$z = \rho c = \tau / v \tag{5}$$

Nur der Einfachheit wegen, wurde der verlustfreie Fall mit reellem Schermodul G zugrunde gelegt. Auf einen komplexen G-Wert erweitert, ist unmittelbar auch die verlustbehaftete Wellenleitung inbegriffen. Die im Folgenden benützte Umstellung der Impedanzgleichung

$$\rho c\, v - \tau = 0 \tag{6}$$

wird auch als Ohm´sches Gesetz der Akustik bezeichnet. Im elektrischen Leiter induziert eine Spannung U bei einem Widerstand R einen Stromfluss J entsprechend der Gleichgewichtsbedingung RI - U = 0. Analog dazu induziert eine lokale Scherspannung τ bei der Impedanz z = ρc eine lokale Schnelle v = τ/ρc. Die in x-Richtung mit den Schallgeschwindigkeit c = {+c, –c} laufende Planwelle (2) mit der transversalen Auslenkung s = s(x,t) [m] hat die Schnelle v und die Scherspannung τ

$$v = \partial s/\partial t = s° \tag{7}$$

$$\tau = G\, \partial s/\partial x = Gs' = \rho c^2 s' \tag{8}$$

Diese Beziehungen in (6) eingesetzt, ergibt zusammen mit der Identität $G = \rho c^2$ (3) die skalare Wellengleichung A als PDG 1. Ordnung

$s° - cs' = 0 \qquad c = \{+c, -c\}$ **Skalar-Gleichung A** (9)

und hat eine Laufwelle mit der vorgebbaren Wellenrichtung $c = \{+c, -c\}$ als Lösung.

$s = s_0 \sin \omega(t - x/c) \quad c = \{+c, -c\} \quad s_0 = \{s_{0+}, s_{0-}\}$ (2)

Gl. (9) steht in Konkurrenz zur konventionellen, ebenfalls auf den homogenen, transversalen Wellenleiter angewandte PDG 2. Ordnung.

$s^{°°} - c^2 s'' = 0$ (10)

Ersichtlich an dem quadratischen Geschwindigkeitsterm $c^2 = (+c)^2 = (-c)^2$ enthält diese Wellengleichung ununterscheidbar beide ± c-Wellenrichtungen und ist so nur für das sich aus Hin- und Rückwelle zusammensetzende Stehwellenfeld zuständig.

$s_{\pm} = s_{0\pm} \sin \omega t \ \sin \omega x/c$ (11)

In [5] wurde die longitudinale Wellengleichung unter der hypothetischen Annahme eines lokalen Gleichgewichtes des Impulsflusses abgeleitet. Es ist zweckmäßig für den Impuls, definiert als Masse mal Geschwindigkeit, eine eigene Einheit Huygens [Hy = mkg/s] einzuführen. Danach besteht in einem Wellenleiter mit der spezifischen Dichte ρ und der vektoriellen Schnelle **s°** der spezifische Impuls ρ**s°** [Hy/m³]. Pflanzt sich die Schnelle **s°** mit der Wellengeschwindigkeit **c** fort, so liefert das dyadische Produkt ρ**cs°** [Hy/sm²] den lokalen Impulsfluss. In Analogie zur Cauchy-Bewegungsgleichung wurde dieser Teil als kinetischer Impulsfluss bezeichnet, der mit dem potentiellen Impulsfluss, dem Spannungstensor **T** im lokalen Gleichgewicht steht.

$\rho \mathbf{cs°} - \mathbf{T} = \mathbf{0}$ (12)

So weit ist die Herleitung unabhängig von der Wellenart. Im Besonderen besteht die elastische Verformung **∇s** aus der symmetrischen, longitudinalen Komponente $\nabla \mathbf{s}_{sym}$ und aus der asymmetrischen, transversalen Komponente $\nabla \mathbf{s}_{asym}$.

$\nabla \mathbf{s} = \nabla \mathbf{s}_{sym} + \nabla \mathbf{s}_{asym}$ (13)

$\nabla \mathbf{s}_{sym} = ½ (\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T) = ⅓\, \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{s}$ (14)

$\nabla \mathbf{s}_{asym} = ½ (\nabla \mathbf{s} - \nabla \mathbf{s}^T) = \mathbf{U} \times \mathbf{rot\ s}$ (15)

Der transversale Spannungstensor $\nabla \mathbf{s}_{asym}$ gibt zusammen mit dem Schermodul G [Pa] den transversalen Spannungstensor ($\mathbf{U} = \{\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}\}$ = Einheitstensor)

$\mathbf{T}_{trans} = G \nabla \mathbf{s}_{asym} = G\, \mathbf{U} \times \mathbf{rot\ s}$ (16)

und damit das hypothetische, transversale Impulsfluss-Gleichgewicht.

$\rho \mathbf{cs°} - G\, \mathbf{U} \times \mathbf{rot\ s} = \mathbf{0}$ (17)

Die skalare Multiplikation mit der transversalen Wellengeschwindigkeit **c** reduziert die Tensor- (17) auf die Vektor-Gleichung (18)

$\rho c^2 \mathbf{s°} + G\, \mathbf{c} \times \mathbf{rot\ s} = \mathbf{0}$ (18)

und die Division mit der Identität $G = \rho c^2$ (3) gibt schließlich die für den homogen Wellenleiter maßgebende vektorielle Wellengleichung B

$\mathbf{s° - c \times rot\ s = 0}$ **Vektor-Gleichung B** (19)

Kontrollrechnung 1: Ist die Transversalwelle (2) eine Lösung der Wellengleichung (19)? Dazu werden die Schnelle **s°** und die Rotation **rot s** gebildet. (∇x = **i**)

$\mathbf{s} = s_0 \mathbf{j} \sin \omega(t - x/c) = s\mathbf{j}$ (1)

$\mathbf{s°} = \partial \mathbf{s}/\partial t = \omega s_0 \mathbf{j} \cos \omega(t - x/c)$ (20)

$\mathbf{rot\ s} = \mathbf{rot}\ s\mathbf{j} = \omega s_0 \mathbf{j} \times \mathbf{i}/c \cos \omega(t - x/c)$ (21)

und zusammen mit der in Wellenrichtung **i** laufenden Schallgeschwindigkeit

$\mathbf{c} = c\mathbf{i} \quad c = \{+c, -c\}$ (22)

in die Wellengleichung (19) eingesetzt, gibt die Forderung:

$[\mathbf{j} - \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})] = [\mathbf{j} - (\mathbf{j}\, \mathbf{i{\cdot}i} - \mathbf{i}\, \mathbf{i{\cdot}j})] = [\mathbf{j} - \mathbf{j}] = \mathbf{0}$ (23)

Die Auswertung von (23) zeigt mit **i·i** = 1 und mit **i·j** = 0 volle Übereinstimmung **[…] = 0**. Diese Übereinstimmung besteht darüber hinaus für alle Polarisationsrichtungen **a** die nach **i·a** = 0 orthogonal zur Ausbreitungs-Richtung **i** sind.

Kontrollrechnung 2: Sind die Skalar- A (9) und Vektor-Gleichung B (19) äquivalent? Bei Homogenität sind Wellen-**i** und Transversal-Richtung **a** konstant und senkrecht zueinander. Mit den Zwischenrechnungen (26) – (28)

$\operatorname{rot} \mathbf{s} = \operatorname{rot} s\mathbf{a} = s \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla s = - \mathbf{a} \times \nabla s$ (26)

$\mathbf{i} \times \operatorname{rot} \mathbf{s} = - \mathbf{i} \times (\mathbf{a} \times \nabla s) = \mathbf{a}\, \mathbf{i}{\cdot}\nabla s - \nabla s\, \mathbf{i{\cdot}a} = \mathbf{a}\, \mathbf{i}{\cdot}\nabla s$ (27)

$\mathbf{a}\, \mathbf{i}{\cdot}\nabla s = \mathbf{a}\, \partial s/\partial x = \mathbf{a}\, s'$ (28)

erhält man das Ergebnis

$(s° - c\, s')\, \mathbf{a} = 0 \quad \rightarrow \quad (s° - c\, s') = 0$ q. e. d. (29)

Vorarbeiten. Literatur

[1] K. Maeda, T. Colonius: A source term approach for generation of one-way acoustic wave in the Euler and Navier-Stokes equation. Wave Motion. (2017). http:dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.08.004.

[2] D. A. Angus: The One-Way Wave Equation: A Full-Waveform Tool for Modeling Seismic Body Wave Phenomena. Surv. Geophys (2014) 35:359 – 393.

[3] Halliburton Energy Services: Hybrid one-way and full-way wave equation migration. US-Patent Nr. 8 116 168 (2012)

[4] O. Bschorr, H.-J. Raida: Longitudinal One-Way Wave Equation. DAGA Fortschritte in der Akustik. (2020)

[5] O. Bschorr: Deviationswellen im Festkörper. DAGA Fortschritte in der Akustik. (2014). S. 80/81.

[6] M. Lagally, W. Franz: Vorlesungen über Vektorrechnung. 7. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG. Leipzig 1964.

[7] H. Altenbach: Kontinuumsmechanik. 2. Aufl. Springer-Vieweg-Verlag. Berlin. Heidelberg. 2012.