Parametrische Kurzzeit-Leistungsspektren für die Charakterisierung von Wasserschallquellen

Andreas Galka

Wehrtechnische Dienststelle für Schiffe und Marinewaffen, Maritime Technologie und Forschung (WTD 71), 24340 Eckernförde, Deutschland; E-Mail: andreasgalka@bundeswehr.org

Einleitung

Die Schallabstrahlung von Schiffen zeigt oft eine ausgeprägte Richtungsabhängigkeit. Bei Relativbewegung zwischen Schiff und Hydrophon ergibt sich dadurch Nichtstationarität, und die Charakterisierung von Wasserschallquellen muß auf der Grundlage kurzer Zeitreihensegmente erfolgen. In solchen Situationen können schwache Quellen oftmals nicht durch nicht-parametrische Spektralschätzer, wie etwa FFT, identifiziert werden. In diesem Beitrag wird daher die Identifizierung und Charakterisierung von Wasserschallquellen mittels parametrischer Spektralschätzer, basierend auf Zustandsraum-Modellierung, diskutiert. Eine Anwendung auf Wasserschallquellen eines Schiffes, das an einem Hydrophon vorbeifährt, wird vorgestellt.

Wasserschalldaten

Wir verwenden Wasserschalldaten, die im August 2019 bei einer Vorbeifahrt des Forschungsschiffs ELISABETH MANN BORGESE an einer abgesetzten AMAR-Boje (JASCO Applied Sciences) in der Ostsee im Flachwasser einige Seemeilen vor der Einfahrt des Hafens Warnemünde aufgezeichnet wurden; die Geschwindigkeit betrug 5.6 kn. Die Abtastrate betrug $f_s = 64$ kHz, aber wir verwenden ein Subsampling auf $f_s = 2$ kHz. Für dieses Paper wird ein Intervall von 20 Sekunden Länge am *closest point of approach* ausgewählt.

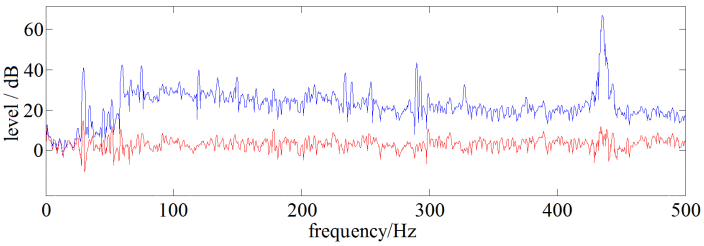

Abbildung 1: Nichtparametrische Schätzung des Leistungsspektrums der verwendeten Wasserschalldaten (blau) sowie der Vorhersagefehler nach Zustandsraummodellierung (rot)

In Abbildung 1 ist eine nichtparametrische Schätzung des Leistungsspektrums (gemittelte und geglättete FFT) der ausgewählten Wasserschalldaten dargestellt (blaue Kurve). Man erkennt sowohl schmalbandige Linien als auch breitbandige Anteile. Auffällig ist neben der starken Linie bei 435 Hz ein Kamm von Linien unterhalb von 200 Hz mit einem Linienabstand von etwa 15 Hz, der auf die Diesel-Maschine des Schiffes zurückgeht.

Parametrische Spektralschätzer

Parametrische Spektralschätzer lassen sich durch Verwendung *autoregressiver moving-average* (ARMA) Modelle formulieren. Dabei handelt es sich um eine Klasse linearer stochastischer Vorhersagemodelle für Zeitreihen, deren allgemeine Definition gegeben ist durch

$$y_t = \sum_{k=1}^{p} a_k y_{t-k} + \sum_{k=1}^{q} b_k \eta_{t-k} + \eta_t \qquad (1)$$

Hierin bezeichnet y_t die Daten (i.e., Amplituden) und η_t ein Gauß-verteiltes weißes Rauschen (mit Varianz σ_η^2), während die a_k und b_k zwei Sätze von Modellparametern bezeichnen, die an die Daten angefittet werden müssen. p und q bezeichnen die ganzzahligen Modellordnungen, und das Modell wird entsprechend als ARMA(p,q)-Modell bezeichnet. Gewöhnlich setzen wir $q = p - 1$. Für unsere Zwecke ist insbesondere das ARMA(2,1)-Modell nützlich:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \eta_t + b_1 \eta_{t-1} \qquad (2)$$

Sobald Schätzwerte für die Modellparameter a_1, a_2 und b_1 eines ARMA(2,1)-Modells vorliegen, ergibt sich ein parametrischer Spektralschätzer als

$$\tilde{y}_f = \left| \frac{\sigma_\eta \big(1 + b_1 \exp(-2\pi i f)\big)}{1 - a_1 \exp(-2\pi i f) - a_2 \exp(-4\pi i f)} \right|^2 \qquad (3)$$

Ein ARMA(2,1)-Modell entspricht einer (stochastischen) Differentialgleichung zweiter Ordnung und kann somit einen oszillierenden Prozeß mit einer bestimmten Frequenz beschreiben; durch Modelle höherer Ordnung, ARMA$(p, p-1)$ mit $p > 2$, lassen sich auch Prozesse mit mehreren Frequenzen beschreiben. Der entsprechende parametrische Spektralschätzer ergibt sich als

$$\tilde{y}_f = \left| \frac{\sigma_\eta \big(1 + \sum_{k=1}^{p-1} b_k \exp(-2k\pi i f)\big)}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-2k\pi i f)} \right|^2 \qquad (4)$$

Zustandsraum-Modellierung

Größere Flexibilität bei der Beschreibung von Zeitreihen mit mehreren Frequenzen (i.e., mehreren Linien oder breitbandigen Prozessen) erhält man durch Verwendung gewichteter Summen von ARMA(2,1)-Modellen. Dabei ergibt sich jedoch das Problem, daß gleichzeitig mehrere ARMA(2,1)-Modelle an eine einzige Zeitreihe angefittet werden müssen, wobei auch die Gewichtungsfaktoren unbekannt sind und gefittet werden müssen. Dieses Problem läßt sich im Rahmen der Zustandsraum-Modellierung lösen. Zu diesem Zweck wird Gleichung (2)

als ein System zweier Gleichungen umformuliert:

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{t-1} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \eta_t \tag{5}$$

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t \tag{6}$$

Hierin bezeichnet $\mathbf{x}_t$ einen 2-dimensionalen Vektor, genannt Zustandsvektor (*state vector*). Dieses Gleichungssystem stellt ein Zustandsraum-Modell (*state space model*) dar [1]; wir schreiben es verallgemeinert als

$$\mathbf{x}_t = \mathsf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t\,, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathsf{Q}) \tag{7}$$

$$y_t = \mathsf{C}\mathbf{x}_t + \epsilon_t\,, \qquad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_\epsilon^2) \tag{8}$$

Hier ist ein weiterer Rauschterm ϵ_t hinzugekommen, bezeichnet als Meßrauschen, wiederum angesetzt als Gaußverteiltes weißes Rauschen (mit Varianz σ_ϵ^2), während die Kovarianzmatrix des 2-dimensionalen Rauschterms $\boldsymbol{\eta}_t$ (bezeichnet als dynamisches Rauschen) durch

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & b_1^2 \end{pmatrix} \sigma_\eta^2 \tag{9}$$

gegeben ist. In Gleichung (7-8) bezeichnet A die Zustandsübergangsmatrix, und C die Beobachtungsmatrix (welche bei 1-dimensionalen Daten aber ein Vektor ist).

Sollen N Linien und breitbandige Prozesse beschrieben werden, so wird für jede/n von diesen ein Zustandsraum-Modell gemäß Gleichung (5-6), bzw. (7-8) aufgestellt, jeweils mit (2×2)-Zustandsübergangsmatrix A_n, (2×2)-Kovarianzmatrix Q_n und (1×2)-Beobachtungsmatrix C_n, wobei $n = 1, \ldots, N$; sodann wird eine große $(2N \times 2N)$-Zustandsübergangsmatrix aufgebaut, auf deren Diagonale die A_n angeordnet werden; aus den Q_n wird in gleicher Weise eine große $(2N \times 2N)$-Kovarianzmatrix aufgebaut. Eine $(1 \times 2N)$-Beobachtungsmatrix wird durch horizontales Aneinanderfügen der C_n aufgebaut, wodurch eine Matrix, bzw. ein Vektor, folgender Form entsteht:

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & \ldots & c_N & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Um eine redundante Parametrisierung zu vermeiden, müssen die Varianzen σ_η^2 in Gleichung (9) auf 1 normiert werden; die entsprechenden Freiheitsgrade werden von den Beobachtungsparametern c_n repräsentiert.

Der einem solchen aus N ARMA(2,1)-Modellen aufgebauten Zustandsraum-Modell entsprechende parametrische Spektralschätzer ergibt sich als

$$\tilde{y}_f = \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n \left(1 + b_1^{(n)} \exp(-2\pi i f)\right)}{1 - a_1^{(n)} \exp(-2\pi i f) - a_2^{(n)} \exp(-4\pi i f)} \right|^2 \tag{11}$$

wobei mit $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ und $b_1^{(n)}$ die Parameter der einzelnen ARMA(2,1)-Modelle bezeichnet werden.

Prozesse mit höheren Harmonischen

Für jedes ARMA(2,1)-Modell ist die Zustandsübergangsmatrix A_n durch die autoregressiven Parameter $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ parametrisiert. Für reelle Parameter ergeben sich die Eigenwerte von A_n als konjugiert komplexes Paar:

$$\rho^{(n)} \exp(\pm i\phi^{(n)}) = \frac{1}{2}\left(a_1^{(n)} \pm \sqrt{\left(a_1^{(n)}\right)^2 + 4a_2^{(n)}}\right) \tag{12}$$

Die Umformung in umgekehrter Richtung ergibt sich als

$$a_1^{(n)} = 2\rho^{(n)} \cos\phi^{(n)} \quad , \quad a_2^{(n)} = -\left(\rho^{(n)}\right)^2 \tag{13}$$

Die Phase $\phi^{(n)}$ der konjugiert komplexen Eigenwerte entspricht, nach Multiplikation mit $f_s/(2\pi)$, der Frequenz, die das Modell beschreibt, während der Betrag $\rho^{(n)}$ das Dämpfungverhalten, bzw. die Breite der Linie beschreibt: je näher der Betrag an 1 heranrückt, um so schärfer wird die Linie; oberhalb von 1 würde das Modell divergieren.

Wenn wir einen Linienkamm modellieren wollen, müssen wir eine Anzahl von Einzellinien mit festen Linienabstand Δf beschreiben. Dies kann entweder durch ein ARMA$(p, p-1)$-Modell entsprechend hoch gewählter Ordnung p geschehen, entsprechend dem Spektralschätzer in Gleichung (4), oder durch eine gewichtete Summe von ARMA(2,1)-Modellen, entsprechend dem Spektralschätzer in Gleichung (11). Von diesen beiden Möglichkeiten ist die letztere vorzuziehen, da sie durch die den einzelnen Linien zugeordneten Parameter c_n (vgl. Gleichung (10)) die Möglichkeit bietet, die Stärke der einzelnen Linien individuell anzupassen.

In beiden Fällen muß aber dafür gesorgt werden, daß der feste Linienabstand Δf eingehalten wird, d.h., anstelle der Frequenzen

$$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}, \ldots$$

werden nun die Frequenzen

$$\phi^{(1)}, 2\phi^{(1)}, 3\phi^{(1)}, \ldots$$

verwendet, wobei die Differenzen $\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}$ dem Linienabstand Δf entsprechen, nach Multiplikation mit $f_s/(2\pi)$. Die Anzahl der Modellparameter, die an die Daten angefittet werden müssen, reduziert sich dadurch erheblich, wodurch auch der Aufwand an Rechenzeit sinkt, jedoch ist es notwendig, statt der autoregressiven Parameter $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ die alternative Parametrisierung $\phi^{(n)}, \rho^{(n)}$ zu verwenden; während für die Oberwellen im Linienkamm die Frequenzen $\phi^{(n)}$ vorgegeben sind, soll der Betrag $\rho^{(n)}$ weiterhin als freier Modellparameter verwendet werden.

Bestimmung der Modellparameter

Das aus ARMA(2,1)-Modellen aufgebaute Zustandsraum-Modell enthält folgende Parametergruppen:

- autoregressive Parameter $a_k^{(n)}$, oder alternativ $\phi^{(n)}, \rho^{(n)}$
- *moving-average* Parameter $b_1^{(n)}$
- Beobachtungsparameter c_n
- Varianz des Meßrauschens σ_ϵ^2

Auch der Anfangswert der Sequenz der Zustandsvektoren $\mathbf{x}_0$ und die zugehörige Kovarianzmatrix P_0 können zu den Modellparametern gerechnet werden.

Schätzwerte für die Modellparameter werden durch einen Maximum-Likelihood-Ansatz bestimmt. Zu diesem Zweck müssen zunächst für gegebene Daten aus dem Zustandsraum-Modell nach den Gleichungen (7-8) Schätzwerte für die Zustandsvektoren $\mathbf{x}_t$ bestimmt werden. Dies geschieht durch eine zeitliche Iteration, die als Kalman-Filterung bekannt ist [1]:

$$v_{t-1}^2 = \mathsf{C}\mathsf{P}_{t-1}\mathsf{C}^\mathsf{T} + \sigma_\epsilon^2 \tag{14}$$

$$\nu_{t-1} = y_{t-1} - \mathsf{C}\hat{\mathbf{x}}_{t-1} \tag{15}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathsf{A}\hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathsf{A}\mathsf{P}_{t-1}\mathsf{C}^\mathsf{T} v_{t-1}^{-2}\nu_{t-1} \tag{16}$$

$$\mathsf{P}_t = \mathsf{A}\mathsf{P}_{t-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} + \mathsf{Q} - \mathsf{A}\mathsf{P}_{t-1}\mathsf{C}^\mathsf{T} v_{t-1}^{-2}\mathsf{C}\mathsf{P}_{t-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} \tag{17}$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}_t$ den Schätzwert (d.h., die Vorhersage) des Zustandsvektors $\mathbf{x}_t$ und P_t die zugehörige Kovarianzmatrix bezeichnet. ν_t bezeichnet die Vorhersagefehler der Daten (auch als „Innovationen“ bekannt) und v_t^2 die zugehörige Varianz.

Gleichzeitig mit der Kalman-Filterung wird die (logarithmische) Likelihood berechnet durch

$$\log L = -\frac{1}{2}\sum_t \left(\log v_t^2 + \frac{\nu_t^2}{v_t^2}\right) \tag{18}$$

In Gleichung (18) ist ein konstanter Term fortgelassen worden, da er keine Relevanz für die Bestimmung der Modellparameter hat.

Die numerische Maximierung der (logarithmischen) Likelihood erfolgt durch rekursive Anwendung von Standard-Algorithmen für numerische Optimierung:

- Expectation-Maximisation (EM) Algorithmus [2, 3]
- Broyden-Fletcher-Gordon-Shanno Quasi-Newton-Algorithmus [4]
- Nelder-Mead Simplex-Algorithmus [4]

Da die spezielle Form der Matrizen A_n, C_n und Q_n gemäß Gleichungen (5), (9) und (10) erhalten bleiben muß, handelt es sich um einen Fall von Optimierung unter Nebenbedingungen. Die Bestimmung der Modellparameter von Zustandsraum-Modellen unter Nebenbedingungen mittels des EM-Algorithmus ist von Holmes detailliert diskutiert worden [3]. Ihr Algorithmus erfordert, daß die Kovarianzmatrix Q invertierbar ist; wir ersetzen daher die Definition nach Gleichung (9) durch

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & b_1^2 + \beta \end{pmatrix} \tag{19}$$

und setzen den Hilfsparameter β später wieder zu Null.

Es soll betont werden, daß bei der Analyse einer Zeitreihe mittels eines Zustandsraum-Modelles alle in den Daten enthaltenen Prozesse mitberücksichtigt werden müssen, also nicht nur die zu einem Kamm gehörenden Linien. Ziel der Analyse ist es, daß die Vorhersagefehler ν_t möglichst gering und möglichst spektral weiß werden (*whitening*).

Es können auch Teilprozesse vorkommen, deren Eigenwerte (vgl. Gleichung (12)) reell sind; je nachdem, wie die Anfangswerte für die Modellparameter bei der Optimierung gewählt wurden, muß also auch die Möglichkeit gegeben werden, daß im Verlauf der Optimierung konjugiert komplexe Eigenwerte reell werden, und umgekehrt.

An die vorliegende Zeitreihe wurde ein Zustandsraum-Modell mit N=34 ARMA(2,1)-Modellen angefittet. Das nichtparametrische Leistungsspektrum der Vorhersagefehler ist in Abbildung 1 dargestellt (rote Kurve). Im Vergleich zum Leistungsspektrum der Originaldaten ist deutlich sichtbar, daß die Vorhersagefehler näherungsweise spektral weiß sind.

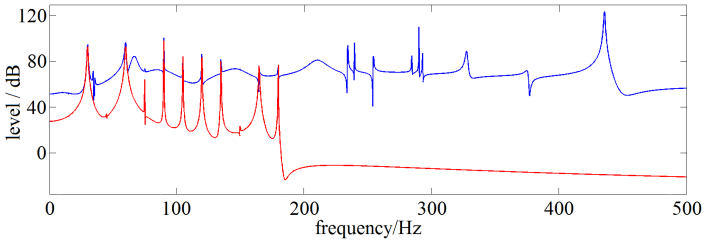

Abbildung 2: Parametrische Schätzung des Leistungsspektrums der verwendeten Wasserschalldaten (blau) sowie der Gesamtheit der 12 Komponenten des durch die Diesel-Maschine erzeugten Linienkamms (rot)

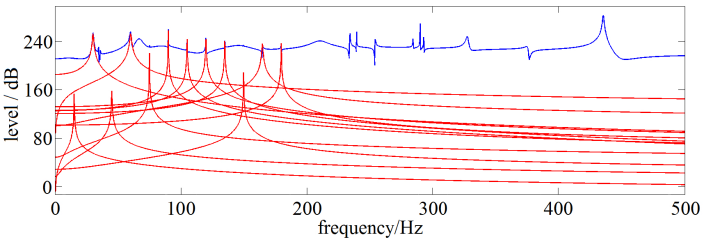

Abbildung 3: Parametrische Schätzung des Leistungsspektrums der verwendeten Wasserschalldaten (blau) sowie jeweils der 12 einzelnen Komponenten des durch die Diesel-Maschine erzeugten Linienkamms (rot)

Ergebnisse

In Abbildung 2 ist das parametrische Leistungsspektrum der Wasserschalldaten dargestellt (blaue Kurve), wie es sich aus Gleichung (11) ergibt, auf Grundlage eines Zustandsraum-Modells mit N=34 ARMA(2,1)-Modellen. Man erkennt, daß das parametrische Spektrum wesentlich glatter ist als das in Abbildung 1 gezeigte nichtparametrische Spektrum.

Da wir eine Abtastrate von 2 kHz verwenden, kann das Spektrum bis 1 kHz aufgelöst werden, jedoch zeigen wir in diesem Paper nur den (für Schiffslinien interessanteren) unteren Frequenzbereich bis 500 Hz; 4 der 34 Linien bzw. Prozesse liegen jedoch oberhalb von 500 Hz.

12 der 34 Linien bzw. Prozesse gehören zum Linienkamm der Diesel-Maschine, mit Linienabstand Δf=14.96 Hz;

das parametrische Leistungsspektrum der Gesamtheit dieser 12 Linien ist ebenfalls in Abbildung 2 dargestellt (rote Kurve). Innerhalb des Frequenzbereichs dieses Linienkamms liegen jedoch auch andere Linien, die keinen Bezug zur Diesel-Maschine haben; die rote Kurve erfaßt diese Linien nicht. Diese Möglichkeit der selektiven Auswahl und Filterung von Linien bzw. Prozessen besteht bei nichtparametrischer Spektralschätzung nicht.

In Abbildung 3 wird das parametrische Leistungsspektrum jeder einzelnen Linie des Linienkamms dargestellt (rote Kurven) und mit dem Gesamtspektrum verglichen (blaue Kurve); dabei wird deutlich, daß die Grundwelle mit Frequenz $\Delta f = 14.96$ und einige harmonische Oberwellen, nämlich $3\Delta f$, $5\Delta f$ und $10\Delta f$, nur sehr schwach ausgeprägt sind.

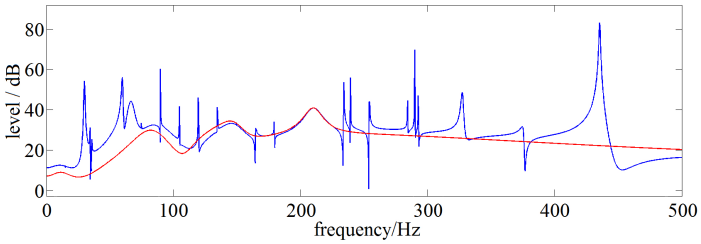

Abbildung 4: Parametrische Schätzung des Leistungsspektrums der verwendeten Wasserschalldaten (blau) sowie der Gesamtheit der 7 Komponenten mit den geringsten Werten des Eigenwertbetrages $\rho^{(n)}$ (rot)

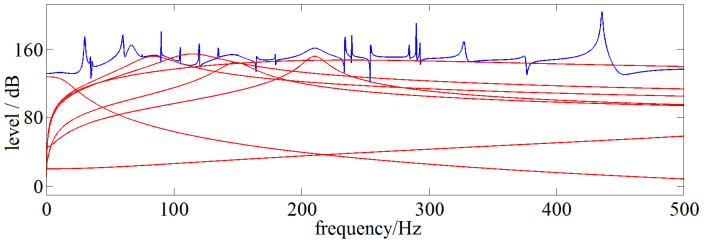

Abbildung 5: Parametrische Schätzung des Leistungsspektrums der verwendeten Wasserschalldaten (blau) sowie jeweils der 7 einzelnen Komponenten mit den geringsten Werten des Eigenwertbetrages $\rho^{(n)}$ (rot)

Nach dem Linienkamm der Diesel-Maschine wollen wir nun noch kurz die breitbandigen Prozesse betrachten, die in dem verwendeten Zustandsraum-Modell auftreten. Das Leistungsspektrum eines ARMA(2,1)-Modells ist um so breiter, je niedriger der Betrag $\rho^{(n)}$ der Eigenwerte ist. Die 7 niedrigsten auftretenden Beträge sind: 0.6308, 0.9073, 0.9376, 0.9535, 0.9636, 0.9647 und 0.9772; alle übrigen Linien haben Beträge zwischen 0.99 und 1.0.

In Abbildung 4 ist, neben dem parametrischen Leistungsspektrum des gesamten Modells mit allen 34 ARMA(2,1)-Modellen (blaue Kurve), das Spektrum der Gesamtheit der 7 Komponenten mit den niedrigsten Beträgen der Eigenwerte dargestellt (rote Kurve). Man erkennt, daß der breitbandige Untergrund des Spektrums durch diese 7 Komponenten gut beschrieben wird. In Abbildung 5 wird das parametrische Leistungsspektrum jeder einzelnen dieser 7 Komponenten dargestellt (rote Kurven) und mit dem Gesamtspektrum verglichen (blaue Kurve).

Zusammenfassung und Ausblick

Die Modellierung durch lineare Zustandsraum-Modelle ist eine direkt im Zeitbereich angewandte Methode der prädiktiven Analyse von Zeitreihen. In diesem Paper haben wir dargestellt, wie aus solchen Modellen parametrische Schätzer des Leistungsspektrums, also für den Frequenzbereich, gewonnen werden können. Dies stellt eine nützliche Alternative zu den üblichen nichtparametrischen Spektralschätzern dar.

Parametrische Modelle im Zeitbereich führen in Bezug auf die Anzahl der verwendeten Parameter eine „sparsame“ Modellierung durch (*parsimonious modelling*); dadurch wird relevante Information von Rauschen getrennt und geglättete Leistungsspektren resultieren. Dies ist essentiell für die Auswertung von kurzen Zeitreihensegmenten, wie sie gerade bei Vorbeifahrten und ähnlichen nichtstationären Situationen anfallen.

Es besteht die Hoffnung, mittels geeignet definierter Zustandsraum-Modelle auch schwache Linien besser detektieren zu können. In diesem Paper haben wir dafür allerdings noch kein Beispiel vorgestellt. Die in Abbildung 3 sichtbaren sehr schwachen Linien sind nicht wirklich detektiert worden, sondern existieren nur als Bestandteile eines Linienkammes. Es soll in zukünftiger Arbeit geklärt werden, ob schwache Linien auch außerhalb eines Linienkammes detektiert werden können.

Ein Schwachpunkt der Analyse von Zeitreihen mit aus ARMA$(p, p-1)$-Modellen aufgebauten Zustandsraum-Modellen ist der hohe Aufwand an Rechenzeit für die Bestimmung der Modellparameter. Die numerische Maximierung der Likelihood in Parameterräumen relativ hoher Dimension erfordert viele einzelne Optimierungsschritte, die insgesamt Stunden an Rechenzeit benötigen, in Abhängigkeit von der Länge der Daten und der Anzahl der Modellparameter. In zukünftiger Arbeit sollen Methoden und Algorithmen entwickelt werden, die den Aufwand an Rechenzeit für die Bestimmung der Modellparameter reduzieren.

Literatur

[1] Kailath, T., Sayed, A., und Hassibi, B.: Linear estimation. Prentice Hall, 2000.

[2] Shumway, R.H., und Stoffer, D.S.: An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. Journal of Time Series Analysis, 3, 253–264, 1982.

[3] Holmes, E.E.: Derivation of an EM algorithm for constrained and unconstrained multivariate autoregressive state-space (MARSS) models. arXiv:1302.3919, 2013.

[4] Nocedal, J., und Wright, S.: Numerical Optimization (2. Ausgabe). Springer-Verlag, 2006.