# Fluiddynamische Berechnung von Schallfeldern an Helmholtzresonatoren

Norbert Gorenflo[1], Tobias Merkel[2], Jonas Stein[3]

[1 2 3] *Beuth Hochschule für Technik Berlin, Fachbereich VII, 13353 Berlin, Luxemburger Str. 10*

[1] *Email: norbert.gorenflo@beuth-hochschule.de* [2] *Email: merkel@beuth-hochschule.de* [3] *Email: jstein@beuth-hochschule.de*

## Einleitung

Es werden numerische Ergebnisse präsentiert, die im Rahmen eines Projekts zur Entwicklung von Kühlern für elektronische Bauelemente erzielt wurden. Die Kühlung soll dabei durch eine gerichtete Luftströmung erfolgen, welche durch resonante Anregung mit Ultraschall großer Amplitude durch ein Array aus Helmholtzresonatoren erzeugt wird [1]. Die Hohlräume der Resonatoren befinden sich dabei in einem Metallkörper mit einer ebenen Oberfläche. Für einen einzelnen Resonator mit einer entsprechenden Ebene (Abbildung 1) wurde das hierbei entstehende zeitabhängige Strömungsfeld in der Entwicklungsumgebung „COMSOL Multiphysics“ [2, 3] unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) durch die Navier-Stokes-Gleichungen modelliert. Als Anfangsbedingung wurde hierbei die zeitharmonische Lösung aus der linearen Wellenakustik zu einem geeigneten Zeitpunkt genommen. In einer früheren Projektphase wurde diese fluiddynamische Implementierung durch den Vergleich der für kleine Amplitude erhaltenen Navier-Stokes-Lösungen mit den entsprechenden Lösungen der linearen Wellenakustik verifiziert [4]. Bei größerer Amplitude der anregenden Schallwelle macht sich die Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen in den Lösungen stärker bemerkbar. Hier nun werden solche durch größere Amplitude entstehende Strömungen untersucht.

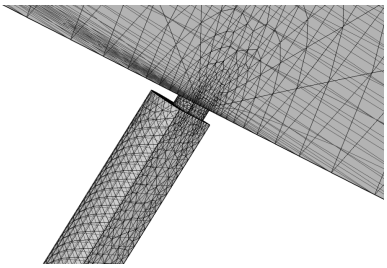

**Abbildung 1:** Dreidimensionales Modell eines Resonators mit Ebene in Höhe des oberen Halsabschlusses und FEM-Netz. Aus Symmetriegründen genügte die Implementierung der halben Konfiguration.

## Mathematische Grundlagen

Zur Berechnung der Resonanzfrequenz eines Resonators wurde eine Kreisscheibe über dem Resonatorhals betrachtet (Abbildung 2). Über diese Kreisscheibe und eine Schwingungsperiode wurde das Quadrat der durch Lösen der Helmholtz-Gleichung erhaltenen Normalschnelle gemittelt (hierbei ist das zeitliche Mittel einfach das halbe Betragsquadrat der *komplexen* Normalschnelle). Als Resonanzfrequenz wurde die Frequenz genommen, für die dieses Mittel maximal war.

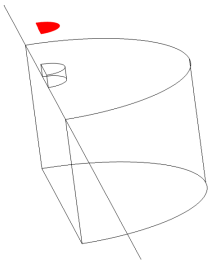

**Abbildung 2:** Kreisscheibe (rot), über die gemittelt wird.

Abbildung 2 zeigt einen Resonator im freien Raum, beim Hinzunehmen einer Ebene wie in Abbildung 1 ändert sich die Resonanzfrequenz etwas.

Als anregende Welle wurde eine ebene Welle mit einer Frequenz nahe der Resonanzfrequenz des Resonators genommen. Aus Symmetriegründen genügt es bei dreidimensionalen Berechnungen, nur die Hälfte der Konfiguration aus Resonator und Ebene zu betrachten, wobei der Schnitt in Richtung der einfallenden Welle erfolgt. Nach anfänglichen dreidimensionalen Berechnungen wurde der Schwerpunkt auf eine von oben einfallende ebene Welle und zweidimensionale axialsymmetrische Berechnungen gelegt, um eine hinreichende Genauigkeit der Ergebnisse zu erhalten.

Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho\,(D\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \mu\,\Delta\boldsymbol{u} + \frac{\mu}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\,; \quad (1)$$

hierbei ist $D\boldsymbol{u}$ die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{u}$ (bezüglich des räumlichen Koordinatenvektors $\boldsymbol{x}$).

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ ist die Strömungsgeschwindigkeit der Luft, $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$ ihre Dichte, $p = p\,(\boldsymbol{x}, t)$ der Luftdruck und $\mu$ die dynamische Viskosität der Luft. Bei 20° Celsius ist $\mu \approx 1.814\,\text{e-}5$ Pa s. Hinsichtlich der Volumenviskosität nehmen wir durchwegs an, dass diese verschwindet.

Die Navier-Stokes-Gleichungen werden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{u}) = 0 \quad (2)$$

und der adiabatischen Zustandsgleichung

$$p = p_{ref}\left(\frac{\rho}{\rho_{ref}}\right)^{\gamma} \quad (3)$$

gelöst.

Hierbei ist $\gamma \approx 1.4$ der Adiabatenexponent (das Verhältnis der spezifischen Wärmen) von Luft und $p_{ref}$ und $\rho_{ref}$ sind Referenzwerte für Druck und Dichte, z.B. der Druck und die Dichte bei nicht strömender Luft ( $p_{ref} \approx 1\,\mathrm{atm}$ und $\rho_{ref} \approx 1.2043\ \mathrm{kg/m^3}$ ).

Bei der anfänglich erfolgten Ergebnisvalidierung für kleine Strömungsgeschwindigkeiten wurde neben den Navier-Stokes-Gleichungen auch noch die Bernoulli-Gleichung für das Geschwindigkeitspotenzial $\phi$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,|\mathrm{grad}\,\phi|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_{ref}}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_{ref}}\right)^{\gamma} = a\,, \qquad (4)$$

$a$ eine Konstante, betrachtet und zusammen mit der Kontinuitätsgleichung gelöst [4]. Hier ergibt sich die Strömungsgeschwindigkeit als Gradient: $\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\phi$. Die so gewonnene Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ ist zusammen mit der Dichte $\rho$ und dem aus Gleichung (3) erhaltenen Druck $p$ eine Lösung der Gleichungen (1) mit $\mu = 0$ und (2). Die so erhaltene Lösung ist physikalisch aber instabil, da in der Realität in einem Medium mit geringer Viskosität sofort Wirbel entstehen, was durch ein Gradientenfeld (hier $\mathrm{grad}\,\phi$) nicht nachgebildet werden kann, weil dessen Rotation verschwindet ($\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0$). Diese Wirbel treten auch bei der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen auf (Abbildung 3). Daher weicht (selbst im Falle verschwindender Viskosität $\mu = 0$) bei größeren Amplituden die numerische Navier-Stokes-Lösung deutlich von der Bernoulli-Lösung ab. Zur Instabilität wirbelfreier Strömungen siehe etwa [5].

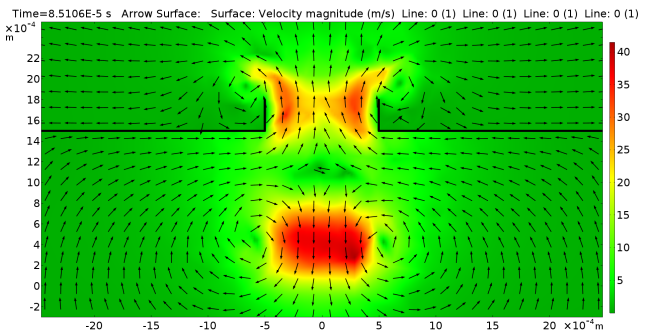


**Abbildung 3:** Strömungsfeld mit Wirbeln, dreidimensional berechnet. Die Anregung erfolgt durch eine von oben einfallende ebene Welle mit der Amplitude 30 Pa und der Frequenz 4700 Hz nahe der Resonanzfrequenz. Die Ebene befindet sich hier in Höhe des *unteren* Halsabschlusses.

Als Randbedingungen für die Navier-Stokes-Gleichungen wurden die Randbedingungen „No slip“ und „Slip“ verwendet. „No slip“ bedeutet, dass die Luft am entsprechenden Teil des Randes den Rand nicht nur nicht durchdringen, sondern auch nicht am Rand entlang gleiten kann: $\boldsymbol{u} = 0$.

„Slip“ ist die sogenannte Naviersche Randbedingung: Mit einer Einheitsnormalen $\boldsymbol{n}$ des Randes gilt $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ und $\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = 0$ mit

$$\boldsymbol{S} = \mu\Big(D\boldsymbol{u} + (D\boldsymbol{u})^T\Big) - \frac{2}{3}\,\mu\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}\,; \qquad (5)$$

hierbei bezeichnet $\boldsymbol{I}$ die 3×3-Einheitsmatrix. $\boldsymbol{S}$ ist der viskose Spannungstensor.

Für $\mu = 0$ entspricht „Slip“ der Randbedingung für eine schallharte Wand in der Wellenakustik.

Für die Anfangsbedingungen für die Navier-Stokes-Gleichungen wurden Werte der durch Lösen der Helmholtz-Gleichung unter Annahme schallharter Wände erhaltenen zeitharmonischen Lösung verwendet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) &= \mathrm{Re}\Big(e^{\,2i\pi\alpha}\,\frac{i}{\omega\rho_0}\,\mathrm{grad}\,p_t(\boldsymbol{x})\Big), \\ p(\boldsymbol{x},0) &= \mathrm{Re}\Big(e^{\,2i\pi\alpha}\,p_t(\boldsymbol{x})\Big). \end{aligned} \qquad (6)$$

Hier ist $\omega$ die Kreisfrequenz der anregenden Welle, $\rho_0$ die Ruhedichte der Luft und $p_t$ der durch Lösen der Helmholtz-Gleichung gewonnene komplexe Schalldruck. $i/(\omega\rho_0)\,\mathrm{grad}\,p_t$ ist die komplexe Schallschnelle. Der Exponentialfaktor kann passend gewählt werden, z.B. so, dass gerade ein Einströmvorgang stattfindet.

Die fluiddynamischen FEM-Berechnungen wurden mit linearen bzw. quadratischen Ansatzfunktionen durchgeführt. Für die zeitliche Diskretisierung wurden die BDF-Verfahren (backward differentiation formulas) bis zur Ordnung 2 verwendet; bei der Benutzung von BDF-Verfahren hoher Ordnung wird der Druck nicht stabil berechnet. Beim Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen wurde die Stabilisierungsmethode „streamline diffusion“ verwendet. Die zweidimensionalen Berechnungen wurden mit linearen Ansatzfunktionen durchgeführt. Um für die zweidimensionalen Berechnungen ein hinreichend feines FEM-Netz zu haben wurde eine Elementgröße genommen, für welche die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ auch ohne Stabilisierung gut berechnet wurde. Allerdings war dabei der berechnete Druck immer noch nicht hinreichend „glatt“. Ein Vergleich der so erhaltenen Ergebnisse mit den analogen Resultaten, die mit „streamline diffusion“ erhalten wurden, zeigte, dass diese Stabilisierung letzten Endes nur noch eine Glättung des Drucks bewirkte, ohne die Ergebnisse zu verfälschen.

## Präsentation von Ergebnissen

Um die durch die anregende Welle hervorgerufene Luftströmung in Resonatornähe über einen gewissen Zeitraum hinweg zu berechnen, muss in der COMSOL-Implementierung die einfallende Welle bereits in der Anfangsbedingung (6) in einem so großen räumlichen Bereich vorliegen, dass zum Endzeitpunkt der Berechnung die Welle im Bereich des Resonators überhaupt noch einfällt. Um den mit Finiten Elementen zu vernetzenden Raumbereich nicht zu groß werden zu lassen, wurde beim Rechnen über längere Zeiträume die einfallende Welle in einem Kundtschen Rohr gespeichert statt z.B. in einem Kugelsegment über der zum Resonator gehörenden Ebene (Abbildung 4).

An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Konfiguration noch dahingehend erweitert wurde, dass zwei Mikrofone auf unterschiedlichen Höhen des Kundtschen Rohrs

simuliert wurden und aus den mittels Navier-Stokes berechneten Werten des Drucks an den Mikrofonorten der komplexe Reflexionsfaktor (und damit der Absorptionsgrad) für den Resonator, der hier quasi als „Probe“ am Abschluss des Rohrs fungierte, nach den bekannten Formeln des Zwei-Mikrofon-Verfahrens ermittelt wurde.

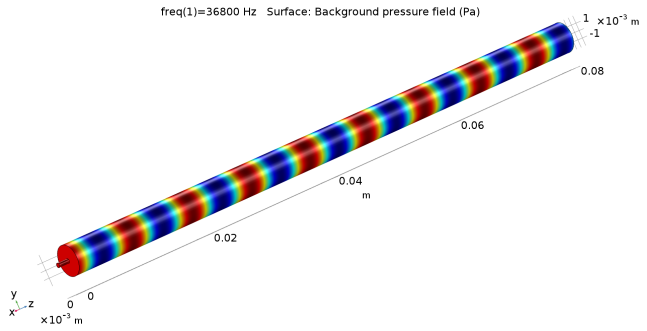


**Abbildung 4:** Resonator am Ende eines Kundtschen Rohres. Im Rohr sind acht Wellenlängen der einfallenden Welle gespeichert.

Hinsichtlich der folgenden Ergebnisse wurde ein Kundtsches Rohr mit dem Durchmesser von 3.999 mm und der Länge von 8 cm betrachtet, an dessen einem Ende die Konfiguration aus Resonator und einer Ebene an dessen oberem Halsabschluss mittig befestigt ist. Die Anregung erfolgte durch eine durch das Rohr auf den Resonator zu laufende ebene Welle mit der Amplitude 50 Pa und der Frequenz 36.8 kHz nahe der Resonanzfrequenz. Damit fällt die anregende Welle auch nach acht Schwingungsperioden noch beim Resonator ein. Die Strömung in der axialsymmetrischen Konfiguration wurde zweidimensional berechnet. Als Randbedingung für den Zylindermantel des Kundtschen Rohrs wurde die Bedingung „Slip“ verwendet, um Reibungsverluste gering zu halten.

Der Resonator selbst hat einen zylindrischen Hohlraum mit einem Radius von 0.3 mm und einer Höhe von 1.5 mm. Der ebenfalls zylinderförmige Hals sitzt mittig auf dem Hohlraum und besitzt den Radius 0.15 mm und die Höhe 0.075 mm. Am Rand des Resonators sowie auf der abschließenden Ebene wurde die Randbedingung „No slip“ vorgeschrieben. Der Realteil des Ortsanteils des komplexen Schalldrucks der einfallenden ebenen Welle, für welche die Helmholtz-Gleichung gelöst wurde, nimmt auf halber Höhe des zylindrischen Hohlraums des Resonators das Maximum 50 Pa an. In (6) wurde $\alpha = 0.85$ gewählt, damit ergaben die Anfangsbedingungen die Werte für einen Zeitpunkt nahezu maximaler Einströmgeschwindigkeit.

Es werden nun Ergebnisse zum Massenfluss durch Flächen in der beschriebenen Konfiguration vorgestellt. Abbildung 5 zeigt einen Teil des zweidimensionalen Modells mit einer zum oberen Halsabschluss parallelen imaginären Kreisscheibe vom Radius des Halsradiusses 0.15 mm, welche sich 1.8 mm mittig über dem oberen Halsabschluss befindet. Abbildung 6 zeigt für acht Perioden der einfallenden Welle den zeitlichen Verlauf des mittleren Massenflusses durch diese Scheibe, wobei positive Werte einem Fluss vom Resonator weg entsprechen. Es ergeben sich ebenfalls acht Schwingungen für den Massenfluss.

Es ist deutlich zu erkennen, dass nach einer Weile die Phasen positiven Massenflusses die Phasen negativen Flusses dominieren und somit der auch zeitlich gemittelte Massenfluss from Resonator weg gerichtet ist (man beachte hierbei, dass die Anfangsbedingung selbst noch nicht durch die Navier-Stokes-Gleichungen, sondern durch Lösen der Helmholtz-Gleichung erhalten wurde).

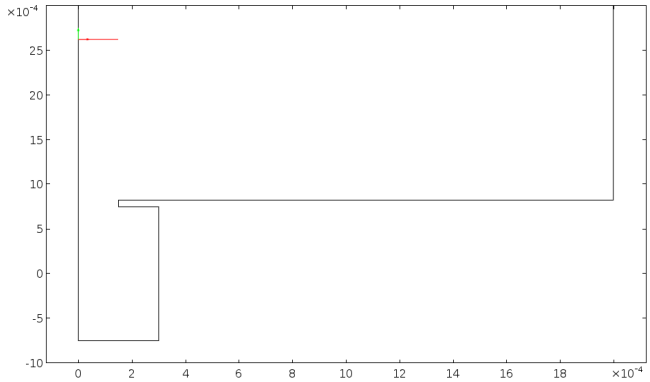


**Abbildung 5:** Eine der Kreisscheiben (rot; im zweidimensionalen Schnitt), über die der Massenfluss gemittelt wurde.

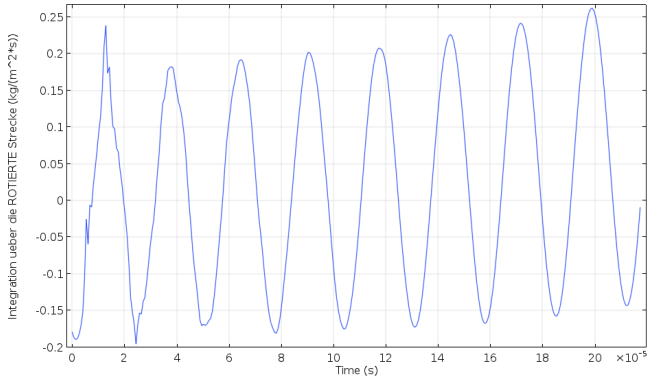


**Abbildung 6:** Zeitlicher Verlauf des mittleren Massenflusses durch die Kreisscheibe von Abbildung 5.

Abbildung 7 zeigt den Verlauf des Massenflusses durch eine noch um 0.6 mm höher gelegene Kreisscheibe.

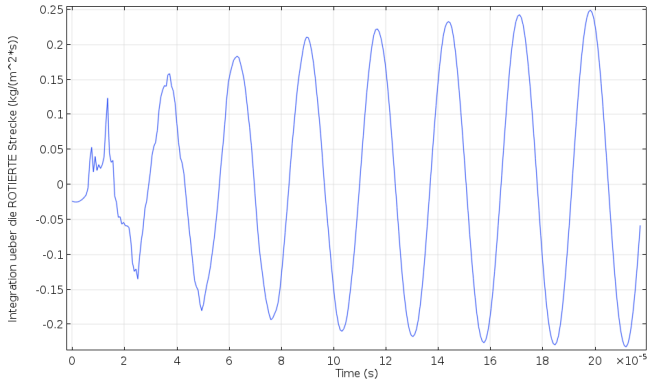


**Abbildung 7:** Zeitlicher Verlauf des mittleren Massenflusses für eine gegenüber Abbildung 5 höher gelegene Kreisscheibe.

Hier befindet sich die Kreisscheibe 2.4 mm über dem oberen Abschluss des Resonatorhalses. Auch hier sind die Maxima des Flusses schließlich größer als die Beträge der Minima.

Wir betrachten nun noch den speziellen Fall des Massenflusses durch die Kreisscheibe, welche den oberen Halsabschluss bildet. Da die im Resonator enthaltene Masse der Luft im Laufe der Zeit nicht unendlich groß wird, muss sich zwischen den Massen der ein- und der ausströmenden Luft ein Gleichgewicht einstellen. Dass dieser Sachverhalt durch die vorgenommene Berechnung auch tatsächlich wiedergegeben wird, zeigt Abbildung 8.

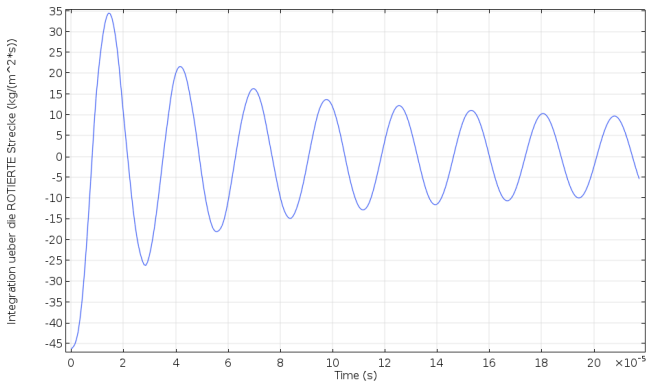


**Abbildung 8:** Zeitlicher Verlauf des mittleren Massenflusses durch den oberen Abschluss des Resonatorhalses.

## Zusammenfassung

Unter Verwendung der Software „COMSOL Multiphysics“ wurde auf Basis der Navier-Stokes-Gleichungen ein Verfahren zur Berechnung von Luftströmungen an Helmholtzresonatoren bei zeitharmonischer Anregung entwickelt. Für die zweidimensionalen Berechnungen für den axialsymmetrischen Fall wurden die Parameter für das numerische Verfahren (FEM für die räumliche und BDF für die zeitliche Diskretisierung) so gewählt, dass die Strömungen mit großer Genauigkeit berechnet werden können. Es wurde damit begonnen, die Luftströmungen hinsichtlich des resultierenden Massenflusses zu untersuchen. Gewünscht ist eine Resonatorform, welche (durch Anregung bei der Resonanzfrequenz) einen möglichst starken vom Resonator weg gerichteten Luftstrom bewirkt.

## Förderung

Die vorliegende Arbeit entstand in Zusammenhang mit dem Projekt „Schallinduzierte Kühlung mit Ultrasonic-Resonatoren“, welches seit Mai 2018 von der Beuth Hochschule für Technik Berlin und der Firma „Fischer Elektronik GmbH & Co. KG“ aus Lüdenscheid durchgeführt wird. Das Projekt wird vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie im Rahmen des Programms „Zentrales Innovationsprogramm Mittelstand“ (ZIM) gefördert.

## Literatur

[1] Merkel, T., Harpain, J., Gorenflo, N., Stein, J.: Small-sized acoustic resonators for ultrasound in air. Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics, Aachen (2019), 956-961, URL: `http://pub.dega-akustik.de/ICA2019/data/index.html`

[2] Simulate Fluid Flow Applications with the CFD Module, URL: `https://www.comsol.com/cfd-module`

[3] Analyze Acoustics and Vibrations with the Acoustics Module, URL: `https://www.comsol.com/acoustics-module`

[4] Gorenflo, N., Merkel, T., Stein, J.: Berechnung von Luftströmungen an Helmholtzresonatoren bei Resonanzfrequenzen. Tagungsband DAGA 2019, Rostock (2019), 1002-1005, URL: `http://pub.dega-akustik.de/DAGA_2019/data/index.html`

[5] Hoffman, J., Johnson, C.: Resolution of d'Alembert's Paradox. Journal of Mathematical Fluid Mechanics 12 (2010), 321-334