

Sensitivitätsanalyse der experimentellen Bestimmung von Flammentransferfunktionen

Fleming Kohlenberg¹, André Fischer², Claus Lahiri², Lars Enghardt¹, Friedrich Bake¹

¹ Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Triebwerksakustik, 10623 Berlin, Email: Fleming.Kohlenberg@dlr.de

² Rolls Royce Deutschland Ltd, 15827 Blankenfelde-Mahlow

Einleitung

Um den menschengemachten CO₂-Ausstoß zu reduzieren, gilt es in Hinblick des zunehmenden Flugverkehrs, Verbrennungsemissionens zu minimieren. Da mehr als 90% der Emissionen des weltweiten Flugverkehrs von großen Flugzeugen stammen, welche durch die geringe Energiedichte von Akkumulatoren und Wasserstoff in naher Zukunft nicht rein elektrisch betrieben werden können, sind sowohl Verbesserungen bei aktuellen Verbrennungssystemen, neue Entwicklungen von turboelektrischen (elektr. Antrieb mit Gasturbine als Generator) Antriebssystemen sowie die Herstellung synthetische Kraftstoffen essenziell.[1]

Im Zuge der Entwicklung zur Reduktion von Schadstoffen gilt die magere Verbrennung als Schlüsseltechnologie für Gasturbinen und Flugzeugturbinen. Da insbesondere dieses Konzept zu Verbrennungsinstabilitäten neigt, gilt es diese mithilfe geeigneter Methoden vorherzusagen.[2] Diese Instabilitäten werden unter anderem als Zusammenhang zwischen Druckschwankungen und Wärmefreisetzungsraten verstanden, bei der durch die Geometrie der Brennkammer eine Rückkopplungsschleife entstehen kann. Eine Methodik zur Vorhersage besteht aus einem Netzwerkmodell der gesamten Turbine, bei der die Reaktion der Flamme auf akustische Anregung durch die komplexe Flammentransferfunktion $F_{\dot{Q}} \in \mathbb{C}$ beschrieben wird,

$$F_{\dot{Q}}(\omega) = \frac{\dot{Q}'/\dot{Q}_0}{u'/u_0}, \quad (1)$$

welche als Quotient aus den normierten Wärmefreisetzungsschwankungen \dot{Q}'/\dot{Q}_0 , und Geschwindigkeitsschwankungen u'/u_0 beschrieben wird.[3]

Experimentelle Bestimmung von $F_{\dot{Q}}$

Die frequenzabhängige Flammentransferfunktion kann entweder über numerische Simulationen, optische Verfahren oder unter der Annahme von niedrigen Machzahlen und einer bezüglich der akustischen Wellenlänge kompakten axialen Ausdehnung der Flamme aus den Rankine-Hugoniot Gleichungen mithilfe von Transfermatrizen bestimmt werden:

$$F_{\dot{Q}}(\omega) = \frac{T_{F,22} - 1}{T_2/T_1 - 1}. \quad (2)$$

In Gleichung (2) beschreibt $T_{F,22}$ ein Element der Transfermatrix der Flamme \mathbf{T}_F , T_1 die mittlere Temperatur stromauf und T_2 stromab der Brennkammer. Im Gegensatz zur Streumatrix, setzt die Transfermatrix nicht die ebenen Wellen, sondern die Schallfelder unmittelbar vor und hinter des Elementes in Zusammenhang. Da die Transfermatrix der Flamme \mathbf{T}_F nicht allein, sondern immer zusammen mit der Brennkammer \mathbf{T}_{BF} experimentell

bestimmt wird, muss der Einfluss der Brennkammer \mathbf{T}_B unter der Annahme, dass sich die akustischen Eigenschaften der Brennkammer mit und ohne Verbrennung nicht unterscheiden, mithilfe von

$$\mathbf{T}_F = \mathbf{T}_{BF} \cdot \mathbf{T}_B^{-1} \quad (3)$$

extrahiert werden.

Zur experimentellen Bestimmung der Transfermatrix der Flamme \mathbf{T}_F wird daher die Brennkammer mit (\mathbf{T}_{BF}) und ohne (\mathbf{T}_B) Verbrennung mit ebenen Wellen akustisch angeregt und das Schallfeld vor (Sektion 1) und hinter (Sektion 2) der Brennkammer mithilfe von mehreren Mikrofonen abgetastet.

Zur Bestimmung der vier unabhängigen Elemente der jeweiligen Transfermatrix sind zwei unabhängige Anregungen (A,B) notwendig. Anschließend kann die Transfermatrix aus den mit der mittleren Dichte ρ und Schallgeschwindigkeit c gemittelten akustischen Druckschwankungen p' und Schallschnelle u' bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} p'_A/\rho c & p'_B/\rho c \\ u'_A & u'_B \end{bmatrix}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} p'_A/\rho c & p'_B/\rho c \\ u'_A & u'_B \end{bmatrix}_1 \quad (4)$$

Für Frequenzen unterhalb der Cut-On Frequenz des Kanals kann das Schallfeld mithilfe von

$$p'_l = p_l^+ + p_l^- \quad \text{und} \quad u'_l = \frac{1}{\rho_l c_l} (p_l^+ - p_l^-) \quad (5)$$

aus den akustischen ebenen Wellen des Drucks p^\pm jeder Sektion $l = 1, 2$ berechnet werden.

Mithilfe der Signale von m verschiedenen Mikrofonen $p'(x_n, t)$ an den axialen Positionen x_n kann das ebene Schallfeld abgetastet werden. Um das resultierende Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{i(\omega t - kx_1)} & e^{i(\omega t + kx_1)} \\ \vdots & \vdots \\ e^{i(\omega t - kx_m)} & e^{i(\omega t + kx_m)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'(x_1, t) \\ \vdots \\ p'(x_m, t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

zu lösen, wird die Systemmatrix \mathbf{W} mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate pseudoinvertiert.

Dieses Gleichungssystem muss jeweils für jede Sektion (1,2), jede Anregung (A,B) und jede Messung mit \mathbf{T}_{BF} und ohne Verbrennung \mathbf{T}_B gelöst werden.

Die Wellenzahl k mit Abhängigkeit von der Machzahl M kann unter Zuhilfenahme der idealen Gasgleichung in die gemessenen unabhängigen Variablen der mittleren Temperatur T , des statischen Druckes P sowie des mittleren Massenstromes \dot{M} zerlegt werden

$$k^\pm = \frac{\omega/c}{1 \pm M} = \frac{\omega}{\sqrt{\kappa R_s T} \pm \frac{\dot{M} R_s T}{P \pi R^2}}. \quad (7)$$

Bei konstanter spezifische Gaskonstante R_s , konstantem Isentropenexponent κ sowie festem Kanalradius R , kann die gesamte experimentelle Modellierung \mathcal{M} der Flammentransferfunktion $F_{\dot{Q}}$ als Funktion

$$F_{\dot{Q}}(\omega) = \mathcal{M}(\omega, p', P, T, \dot{M}, x) \quad (8)$$

von gemessenen Parametern ausgedrückt werden. Die experimentellen Untersuchungen von Einzelbrennen unter flugrealistischen (erhöhten) Temperatur und Druckbedingungen werden am **Scaled Acoustic Rig for Low Emission Technology** (SCARLET) durchgeführt, welcher von Rolls Royce Deutschland betrieben wird. Eine schematische Darstellung der Messung ist in Abb. 1 dargestellt.

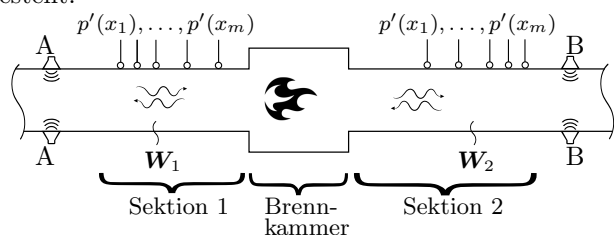


Abbildung 1: Schematische Übersicht der Messsektionen. Die vor- und rückläufigen ebenen Wellen p^+ und p^- werden in jeder Sektion, für jede unabhängige Anregung (A,B) durch die Mikrophonsignale $p'(x_n)$ bestimmt. Die Systemmatrix W in jeder Sektion ist abhängig von T, P, \dot{M}, x .

Unsicherheitsfortpflanzung

Die deterministische Bestimmung der Flammentransferfunktion ($F_{\dot{Q}}$ aus Gleichung (8)) wird in diesem Beitrag um einen stochastischen Beitrag zur Bestimmung der Unsicherheit erweitert.

Ausgehend von der analytischen Modellierung werden folgende Unsicherheiten betrachtet:

- Uns. in der mittleren Temperatur ε_T
- Uns. im mittleren statischen Druck ε_P
- Uns. im mittleren Massenstrom: $\varepsilon_{\dot{M}}$
- Uns. in der Mikrophonsignalamplitude $\varepsilon_{||}$
- Uns. in der Mikrophonsignalphase ε_{φ}
- Uns. in der exakten Mikrophonposition ε_x

Die Unsicherheiten werden als Gleichverteilung modelliert um maximale Uninformiertheit auszudrücken. Im Rahmen dieses Beitrags werden die in Tabelle 1 dargestellten Grenzen δ dieser Gleichverteilung angenommen, welche auf Erfahrungswerten von industriellen Brenntests basieren:

Tabelle 1: Variationsgrenzen für jeden uns. Parameter

δ_{T_1} [%]	δ_{T_2} [%]	$\delta_{P_{1,2}}$ [%]	$\delta_{\dot{M}_{1,2}}$ [%]	$\delta_{ }$ [%]	δ_{φ} [°]	δ_x [mm]
± 0.2	± 1	± 0.5	± 1	± 2	± 1	± 1

Die Temperatur hinter der Brennkammer wird nicht gemessen, sondern aus einer thermodynamischen Berechnung bestimmt. Daher wird die zugrundeliegende Verteilung als unsicherer angenommen. Die exakte Mikrophonposition kann aus einer ungenauen Bestimmung und einer zufällige Ausdehnung der Messsektion resultieren. Die Parameter werden unabhängig von einander variiert,

was die anschließende Sensitivitätsanalyse vereinfacht. Ausgehend von den variierten Größen werden abgeleitete Größen wie die Machzahl neu berechnet und anschließend eine neue Flammentransferfunktion bestimmt. Um die Berechnung zu beschleunigen, werden die gemessenen Zeitsignale der Mikrophone vor der Variation einmalig fouriertransformiert und als komplexe Matrix gespeichert und erst im Anschluss in Amplitude und Phase variiert. Für die Unsicherheitsfortpflanzungen sind zahlreiche Verfahren etabliert. Eine Übersicht im Kontext von Ingenieuranwendungen kann beispielsweise in [4], [5] oder [6] gefunden werden.

Der Versuch, die Varianz \mathbb{V} bzw. die Standardabweichung σ der Flammentransferfunktion analytisch mittels der Störungsmethode

$$\mathbb{V}(F_{\dot{Q}}) = \sigma_{F_{\dot{Q}}}^2 \approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_i} \Big|_{x=\mu_x} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (9)$$

mithilfe der partiellen Ableitungen der Modellfunktion nach den Eingangsparametern $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_i} \Big|_{x=\mu_x}$ um den gemessenen Mittelwert der Eingangsparameter μ_x zu berechnen, stellte sich als nicht praktikabel heraus, da beispielsweise die Unsicherheit in den Mikrophonsignalamplituden aus einer Summe aus einzelnen Beiträgen (Anregung [A,B], Sektion [1,2], Anzahl Mikrophone n_{Mik} , Mit/Ohne Flamme [$T_{\text{BF}}, T_{\text{B}}$])

$$\sigma_{F_{\dot{Q}}(\varepsilon_{||})} \approx \sqrt{\sum_{k=1}^{n_T} \sum_{l=1}^{n_{\text{Sek}}} \sum_{m=1}^{n_{\text{Mik}}} \sum_{n=1}^{n_{\text{Anr}}} \left(\frac{\partial F_{\dot{Q}}}{\partial \varepsilon_{||k,l,m,n}} \right)^2 \sigma_{\varepsilon_{||k,l,m,n}}^2} \quad (10)$$

besteht und somit unübersichtlich viele partielle Ableitungen (Sensitivitätskoeffizienten) resultieren, weshalb die simultane Variation mithilfe der Monte Carlo Simulation bevorzugt wird. Die Monte Carlo Methode basiert auf einer Wiederholung der Berechnung [Gleichung (8)] mit zufällig variierten Eingangsparametern um die zugrundeliegende Verteilung der Flammentransferfunktion zu approximieren. Da die Bestimmung der Flammentransferfunktion aus einfachen Matrixoperationen besteht, wird die Robustheit und einfache Implementierung der Monte Carlo Methode, trotz der im Vergleich zu anderen Methoden langsameren Rechenzeit, bevorzugt. Ein Vorteil gegenüber anderen Methoden, wie zum Beispiel der polynomiellen Chaos Expansion, ist, dass die Konvergenz der Monte Carlo Methode nur von der Samplezahl n und nicht von der Anzahl der Eingangsunsicherheiten abhängt: $\varepsilon_{\text{MC}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ [7]

Der Rechenzeitbedarf für eben jene ist in Tabelle 2 dargestellt. 10 000 Simulationen wiesen eine genügend hohe Auflösung auf.

Tabelle 2: Rechenzeit für die Monte Carlo Methode bei verschiedenen Simulationen n auf einem i5 Prozessor

Simulationen n	100	1000	10 000	100 000
Rechenzeit	10 s	1,5 min	15 min	3 h

Nach dem zentralen Grenzwertsatz nähern sich die Verteilungen der Flammentransferfunktion für jede Frequenz

trotz der Gleichverteilungen in den Eingangsparameter einer Normalverteilung für hinreichend große Samples in der Monte Carlo Simulation an, welches die Anwendung eines Konfidenzintervalls mit einem Vielfachen der Standardabweichung justifiziert. Die Parameter dieser angenäherten Normalverteilung (empirischer Mittelwert $\hat{\mu}$ und empirische Standardabweichung $\hat{\sigma}$) können mit einem Maximum-Likelihood Ansatz der Ausprägungen x_i zu

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2} \quad (11)$$

bestimmt werden.

Ergebnisse

Die Ergebnisse der Unsicherheitsfortpflanzung mit 10 000 Simulationen für einen beliebigen Betriebspunkt in Form von Standardabweichung (hellblau) und 95 % Konfidenzintervall (dunkelblau) um jeden Messpunkt (rote Kreuze) sind in Abb. 2 (Amplitude, spline interpoliert) und Abb. 3 (Phase, linear interpoliert) dargestellt. Die Unsicherheit (Breite) ist nur kaum von der Flammentransferfunktion selbst (Ordinate), jedoch stark von der Frequenz (Abszisse) abhängig; mit der größten Unsicherheit zwischen 800 Hz und 1000 Hz sowohl in der Amplitude als auch in der Phase. Die prozentuale Abweichung kann

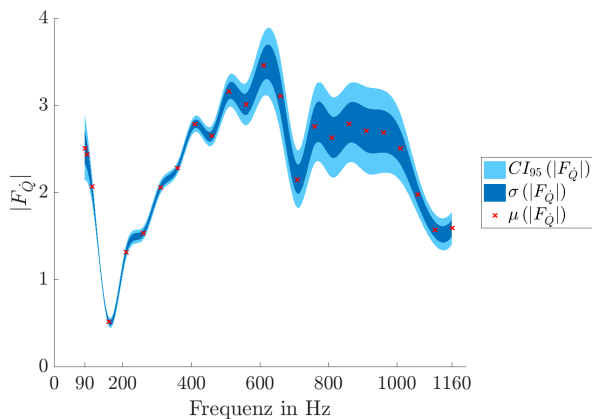


Abbildung 2: Unsicherheitsbereich der Amplitude der Flammentransferfunktion $|F_{\dot{Q}}|$

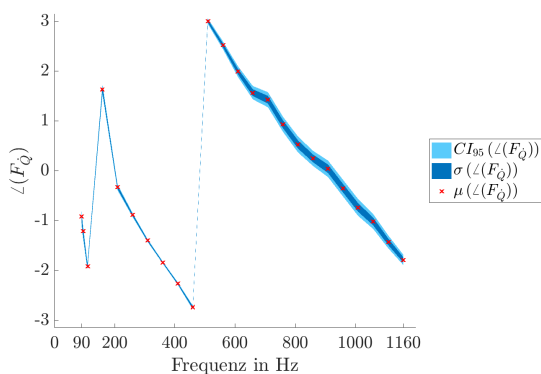


Abbildung 3: Unsicherheitsbereich der Phase der Flammentransferfunktion $\angle(F_{\dot{Q}})$ in rad

durch den Variationskoeffizienten $c_v = \sigma/\mu$ ausgedrückt

werden, welcher in Abb. 4 für $|F_{\dot{Q}}|$ dargestellt ist. Für $\angle(F_{\dot{Q}})$ ist diese Darstellung wegen Nulldurchgängen und Phasensprünge nicht sinnvoll.

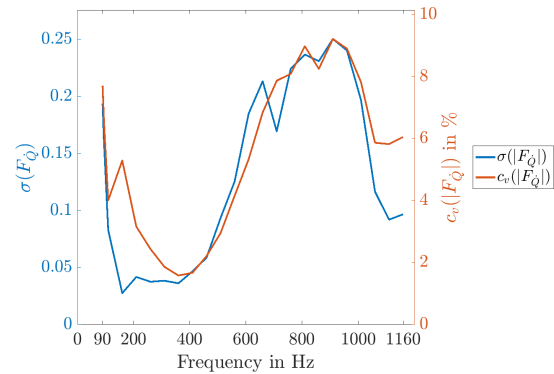


Abbildung 4: Standardabweichung und Variationskoeffizient von $|F_{\dot{Q}}|$

Um die Sensitivitäten der Flammentransferfunktion gegenüber den verschiedenen Eingangsunsicherheiten zu berechnen werden diese einzeln variiert. Die Ergebnisse sind in Abb. 5 dargestellt. Die Summe dieser Einzel-

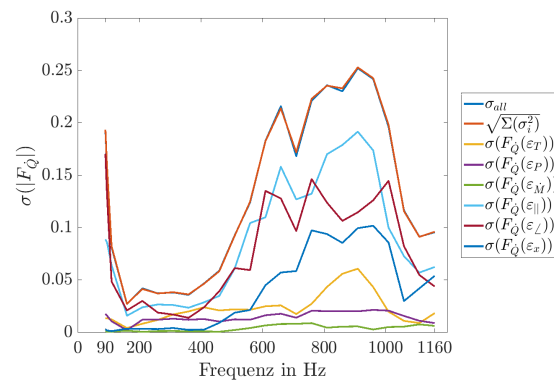


Abbildung 5: Sensitivität von $F_{\dot{Q}}$ in Abhängigkeit von den definierten Unsicherheiten

varianzen (rot) entspricht bei unabhängigen Parametern der Gesamtvarianz (blau). Die Einflüsse von Amplitude und Phase der Mikrophonsignale (hellblau, dunkelrot) sowie der Einfluss der Ungenauigkeit in der exakten Position (dunkelblau) zu höheren Frequenzen dominieren. Die Einflüsse von stat. Temperatur (gelb) Druck (violett), und Massenstrom (grün) auf den Streubereich hingegen ist geringer. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit der Kalibrierung der Messmikrophone in Amplitude und Phase um den Ungenauigkeitsbereich zu verringern. Für die Phase ergibt sich eine ähnliche Zusammensetzung. Durch mehrere Monte Carlo Simulationen konnte gezeigt werden, dass sich die Streuung der Flammentransferfunktion linear zu den Streuungen der einzelnen unsicheren Parametern δ_i bis mindestens 3% für ε_T , ε_P , ε_M , $\varepsilon_{||}$ bzw. bis 7° bei ε_φ und bis 3 mm bei ε_x verhält. Somit sind die Einzelvarianzen der Flammentransferfunktion mit der Breite der jeweiligen Eingangsstreuung skalierbar. Nimmt man bspw. eine gleiche Streubreite $\delta = 1$ in Tabelle 1 für jeden Parameter an, ergibt sich Abb. 6 mit

bspw. fünfmal so großen Beitrag ($\delta_{T_1} : 0.2 \rightarrow 1.0$) der Unsicherheit der Temperatur in Sektion 1 (ε_{T_1}). Obwohl die

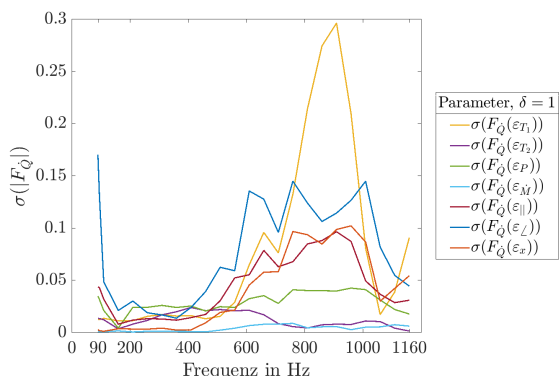


Abbildung 6: Sensitivität von $|F_{\dot{Q}}|$ bei gl. Streubreite $\delta = 1$

Unsicherheit des konkreten Messsystems (Abb. 5) kaum von der Temperatur abhängt, weist das zugrundeliegende System (Abb. 6) tatsächlich eine starke Abhängigkeit von der genauen Bestimmung der Temperatur im Einlauf (T_1) ein. Zur Reduktion der Unsicherheit gilt es daher die Bestimmung der Genauigkeit der Temperatur im Einlauf (ε_{T_1}), sowie der Mikrophonesignale ($\varepsilon_{||}, \varepsilon_{\varphi}, \varepsilon_x$) zu priorisieren. Durch die Linearität ist es möglich diese mit $\delta = 1$ bestimmten Unsicherheiten auf jede konkrete Messsituation mit unterschiedlichen Eingangsunsicherheitsintervallen zu skalieren und die Wirksamkeit von Maßnahmen abzuschätzen.

Zusätzlich wurde untersucht, ob diese Sensitivitäten verallgemeinert werden können oder sich je nach Temperatur und Druckniveau unterscheiden. Es zeigte sich erwartungsgemäß, dass keine generelle Abhängigkeit hergestellt werden konnte und eine Monte Carlo Simulation für jeden Betriebspunkt durchgeführt werden muss. Durch einen Vergleich der Unsicherheitsintervalle verschiedener Betriebspunkte wie in Abb. 7, ist es nun allerdings möglich, Unterschiede der Flammentransferfunktion auf stochastische Unsicherheiten oder systematische Einflüsse des Temperatur- und Druckniveaus zurückzuführen.

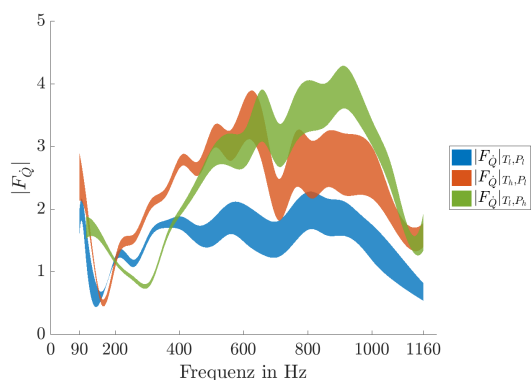


Abbildung 7: Konfidenzintervalle von verschiedenen Betriebspunkten mit hohem Temperatur- (T_h , rot) und (P_h , grün) Druckniveau gegenüber dem niedrigeren Referenzniveau (blau)

Diskussion und Ausblick

Durch die in diesem Beitrag vorgestellte Methodik ist es möglich, die den experimentellen Ergebnissen inhärente Unsicherheit zu quantifizieren sowie die dominanten Quellen zu identifizieren. Es zeigte sich, dass insbesondere der Einfluss der Mikrophonesignale zur Gesamtunsicherheit beitragen. Deshalb wird eine genaue Kalibration in Amplitude und Phase empfohlen. Die Implementierung[8] liefert einen wichtigen Beitrag über die Grenzen und das Weiterentwicklungspotential der experimentellen Untersuchungen. Zukünftig sollen mithilfe der Implementierung auch andere aus Streumatrizen abgeleitete Schallkanalgrößen wie Impedanzen und Dissipation in ihrer Unsicherheit und Sensitivität an anderen Prüfständen abgeschätzt werden.

Danksagung

Die hier dargestellte Arbeit wurde im Rahmen des Verbundprojektes COOREFLEX Turbo 2.1.1 (Förderkennzeichen: 03ET7040W) durchgeführt, welches durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (BMWi) gefördert wird.

Literatur

- [1] National Academies of Sciences, Engineering and Medicine: „Commercial Aircraft Propulsion and Energy Systems Reseach: Reducing Global Carbon Emissions“ (2016), The National Academies Press
- [2] Dowling A. et al.: „Acoustic Analysis of Gas Turbine Combustors“ (2003), Journal of Propulsion and Power Vol. 19 No. 5
- [3] Schuermans, B.: „Modeling and Control of Thermoacoustic Instabilities“ (2003), Doktorarbeit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne
- [4] JCGM 100:2008: „Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement“ (2008)
- [5] Sudret, B.: „Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models“ (2007) Doktorarbeit, Université Blaise Pascal - Clermont II
- [6] Cuneo, A. et al.: „Comparative Analysis of Methodologies for Uncertainty Propagation and Quantification“ (2017) Proceedings of ASME Turbo Expo 2017 Charlotte, NC, USA
- [7] Caffisch, R.: „Monte carlo and quasi-monte carlo methods“ (1998), Acta numerica 1998, 7. Jg
- [8] Kohlenberg, F.: „Sensitivity Analysis of Flame Transfer Function Measurements“ (2019), Masterarbeit, Technische Universität Berlin