Synthese komplexer Richtcharakteristiken für eine Schallfeldoptimierung im Zeitbereich

Mathias Lemke[1], Lewin Stein[1], Arne Hölter[2], Florian Straube[2], Stefan Weinzierl[2]
[1] *Technische Universität Berlin, Fachgebiet Numerische Fluiddynamik, Email: mathias.lemke@tnt.tu-berlin.de*
[2] *Technische Universität Berlin, Fachgebiet Audiokommunikation*

Einleitung

Die Bestimmung optimaler Treiberfunktionen von Lautsprechern in beliebiger Anordnung ist ein schlecht gestelltes Optimierungsproblem, da die Anzahl der Quellen immer erheblich kleiner als die Anzahl der Empfänger ist. Typischerweise werden frequenz-basierte Löser eingesetzt.

In einem vorangegangenen Beitrag haben die Autoren einen Adjungierten-basierten Ansatz vorgestellt, um optimale Treiberfunktionen im Zeitbereich zu bestimmen [3]. Die Methode erlaubt es, inhomogene Windprofile und Temperaturschichtungen einzubeziehen, die typischerweise bei auf der Wellengleichung beruhenden Lösungen nicht berücksichtigt werden. Darüber hinaus können komplexe Geometrien und Randbedingungen berücksichtigt werden.

Bisher war diese Methode auf Monopolquellen beschränkt. Hier stellen die Autoren eine Erweiterung des Ansatzes in Bezug auf eine Adjungierten-basierte Monopolsynthese vor, die es ermöglicht, auch Quellen mit komplexen Richtcharakteristiken zu betrachten. Das Verfahren wird für typische Quellsignale und ein repräsentatives Lautsprechermodell mit komplexer Richtcharakteristik validiert.

Adjungierten-basierte Monopolsynthese

Ziel der hier vorgestellten Arbeiten ist die Modellierung komplexer Schallquellen mittels optimaler Positionierung und Ansteuerung akustischer Monopolquellen.

Die beschreibenden Gleichungen für die Analysen sind die Euler-Gleichungen im Zeitbereich [1], hier abgekürzt mit $E(q)$. Deren Lösung in Raum und Zeit, gegeben durch Dichte, Geschwindigkeit und Druck, wird im Vektor q zusammengefasst.

Zur Modellierung der Schallquellen werden die Euler-Gleichungen um einen Anregungsterm $\hat{s}$ auf der rechten Seite erweitert, wobei dieser nur auf die Druckgleichung wirkt.

$$E(q) = \hat{s} \tag{1}$$

Die Anregungssignale $\hat{s} = \sum_i \hat{s}_i$ lassen sich in Lautsprechersignale s_i konvertieren. Unter vereinfachenden Annahmen, die hier nicht diskutiert werden sollen, gilt $s_i(t) = \partial_t \hat{s}_i(t)$. Für Details wird auf [3] und [4] verwiesen.

Unabhängig davon können die Anregungssignale unterschiedlich formuliert werden:

In der Variante (A) wird die, für jede Quelle i definierte, Anregung $\hat{s}_i(t)$ entsprechend einer Gauss-Verteilung $\chi(x_j)$ auf benachbarte Punkte übertragen.

$$\hat{s} = \sum_i \hat{s}_i(t) \cdot \chi(x_j) \tag{2}$$

Dabei wird eine Halbwertsbreite von 1 bis 4 Gitterweiten (Δx) gewählt. Die Verwendung einer einzelnen Delta-Funktion für χ ist aus Stabilitätsgründen im FTFD-Ansatz (Finite Time Finite Difference) nicht praktikabel.

Zur Modellierung komplexer Schallquellen wird iterativ vorgegangen. Zunächst wird die optimale Position für einen Monopol mittels einer adjungierten Lösung bestimmt, siehe [2] für Details. Anschließend wird das Ansteuerungssignal für diese Quelle wieder Adjungierten-basiert optimiert. Im Detail wird das Zielfunktional

$$J = \frac{1}{2} \iint (p'_{\mathrm{opt}}(x_j, t) - p'_{\mathrm{ref}}(x_j, t))^2 \, \mathrm{d}^3 x_j \, \mathrm{d}t, \tag{3}$$

gegeben als integrale Differenz zwischen der aktuellen numerischen Lösung von (1) p'_{opt} und einem gegebenen Zielschallfeld p'_{ref}, minimiert. Ist Konvergenz erreicht, werden weitere Monopole an optimalen Positionen, siehe wieder [2], jeweils einzeln iterativ hinzugefügt. Die Ansteuerungen aller Monopole werden anschließend wieder optimiert.

Führt das Hinzufügen neuer Monopolquellen zu keiner weiteren Verringerung des Zielfunktionals (3), stimmen die Lösung der Euler-Gleichungen p'_{opt} und das Referenzschallfeld p'_{ref} in einem optimalen Sinne überein. Als Ergebnis der Analyse erhält man die optimalen Positionen und Anregungssignale für die zur Modellierung einer komplexen Schallquelle verwendeten Monopole.

Vorteil dieses Vorgehens ist die optimale, freie Positionierung bei gleichzeitig geringer Anzahl zu verwendender Monopole. Nachteilig ist, dass für komplexe Schallquellen mit einer Vielzahl von Monopolen, die noch dazu sehr dicht aneinander liegen, zu rechnen ist. Aufgrund der räumlichen Ausdehnung der Monopole, über die Gauss-Verteilung χ, ergibt sich die Forderung nach einer hohen räumlichen Auflösung.

Ergebnisse unter Verwendung dieses Ansatzes werden im folgenden Abschnitt gezeigt und diskutiert.

Alternativ lässt sich auch eine gitter-basierte Monopol-Synthese (B) für komplexe Quellen implementieren.

Grundlegende Idee hierbei ist es, jeden Gitterpunkt in einem definierten Sub-Volumen als unabhängigen Monopol zu betrachten und individuell Adjungierten-basiert zu optimieren.

$$\hat{s} = \sum_i \hat{s}_i(x_j, t) \tag{4}$$

Im Vergleich zu (2) wird die GAUSS-Funktion durch Delta-Funktionen an jedem Gitterpunkt ersetzt.

Entsprechend ergeben sich im Vergleich zum zuvor diskutieren Ansatz deutlich mehr Freiheitsgrade zur Darstellung von Schallquellen, wobei sich durch Verwendung der Adjungierten Optimierung der Rechenzeitbedarf nicht erhöht. Unstetige Anregungen werden durch Regularisierung und Filter verhindert.

Während für GAUSS-förmige Monopole bereits eine Umrechnungsvorschrift hergeleitet werden konnte, um Lautsprechersignale aus den Anregungssignalen zu extrahieren, steht dies hier noch aus. Das dabei zu lösende Problem ist, dass die gitter-basierte Monopolsynthese mehr Freiheitsgerade berücksichtigt als ein einzelner spezifischer Lautsprecher besitzt.

Ergebnisse unter Verwendung dieses Ansatzes werden im nächsten Abschnitt gezeigt und diskutiert.

Klassische Monopole (A)

Als Beispiel für die iterative Monopolsynthese mit räumlicher Gewichtung χ wird eine Dipolquelle synthetisiert. Dazu wird ein Referenzschallfeld p'_{ref} mithilfe eines Complex-Directivity-Point-Source-Modells (CDPS) berechnet.

Das Rechengebiet erstreckt sich für alle drei Raumrichtungen von 0 m bis 1 m und ist in jede Richtung mit 128 Gitterpunkten diskretisiert. Die Dipolquelle ist im CDPS-Modell mittig bei $x_{\mathrm{src,ref}} = [0.5, 0.5, 0.5]\,\mathrm{m}$ positioniert und wird mit einem von 1 bis 3 kHz bandbegrenzten weißen Rauschen angeregt.

In der anschließenden Adjungierten-basierten Monopolsynthese liegt die zulässige Quellregion kugelförmig mit einem Radius von $r_{\mathrm{src,opt}} = 0.1\,\mathrm{m}$ um die Referenzquelle. An jedem dritten Iterationsschritt wird eine Monopolquelle innerhalb dieser Quellregion hinzugefügt und mittels des Adjungierten-basierten Algorithmus optimiert.

Das relative Zielfunktional J_n/J_0 ist in der Abb. 1 dargestellt. Es konnte um mehr als eine Größenordnung verringert werden und konvergiert nach vier hinzugefügten Monopolen ab Iterationsschritt $n = 9$ aus.

Die resultierende Richtcharakteristik ist exemplarisch bei der Frequenz $f = 1.5\,\mathrm{kHz}$ in Abb. 2 dargestellt. Die Dipolcharakteristik kann über alle Winkel mit einer Genauigkeit von $< 1\,\mathrm{dB}$ nachgebildet werden, ausgenommen die Regionen um 90° und 270°, in denen die Auslöschung nach unendlich strebt.

Zur Rekonstruktion des Dipols wurden vier Quellen verwendet. Die Anregungssignale der Monopolquellen sind

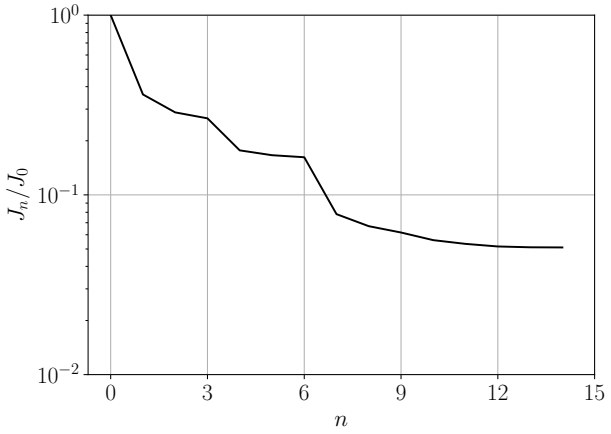


Abbildung 1: Relatives Zielfunktional J_n/J_0. Jeden dritten Iterationsschritt wird ein Monopol hinzugefügt, letztmalig bei dem Iterationsschritt $n = 9$.

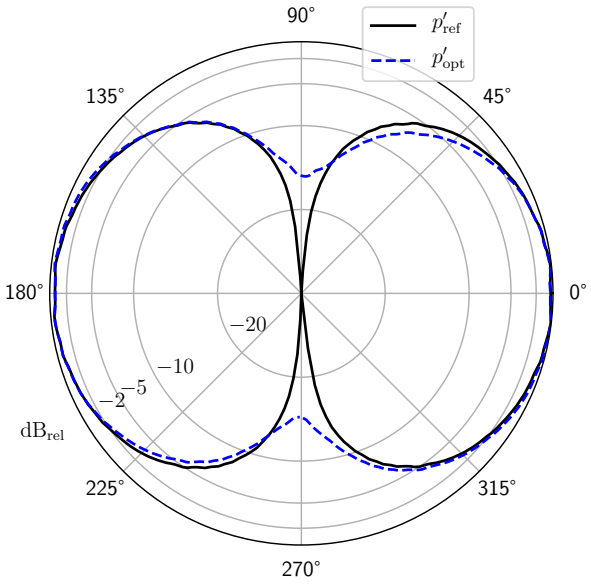


Abbildung 2: Richtcharakteristik der Amplitude bei $f = 1.5\,\mathrm{kHz}$ des Referenzschallfeldes p'_{ref} und des optimierten Schallfeldes p'_{opt} um $x_{\mathrm{src,ref}}$ mit Kreisradius $x_{\mathrm{eval}} = 0.3\,\mathrm{m}$ in der $x_1 - x_2$-Ebene bei $x_3 = 0.5\,\mathrm{m}$.

in Abb. 3 abgebildet. Die Quelle s_0 besitzt die stärkste Anregung, während s_3 und s_6 sehr ähnliche Anregungen erhalten. Die zuletzt hinzugefügte Quelle s_9 wird nur gering angeregt und trägt nur geringfügig zur Qualitätsverbesserung bei, siehe auch Abb. 1.

Jede der Quellen benötigt einen Radius von vier Gitterweiten. Daraus resultiert eine absolute Ausdehnung von ca. 0.07 m bei der gewählten Diskretisierung. In Abb. 4 sind die gewählten Monopolquellpositionen dargestellt. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass simple Quellen, wie beispielsweise der Dipol, darstellbar sind. Allerdings benötigen komplexere Quellen eine deutlich höhere Anzahl an Quellen, wodurch die Quellregion vergrößert oder die räumliche Diskretisierung erhöht werden muss,

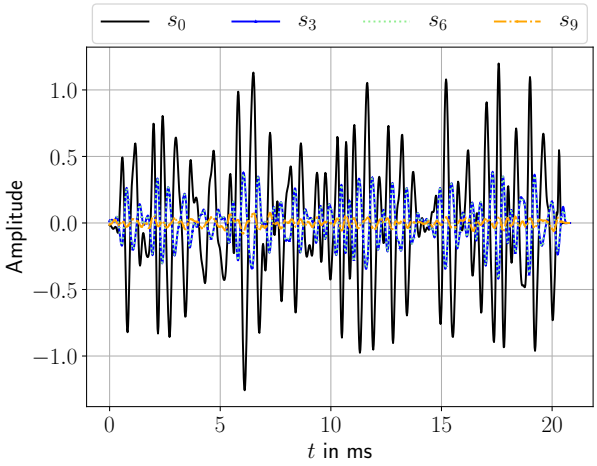


Abbildung 3: Zeitliche Anregungssignale $\hat{s}$ der Monopolquellen s_n. Der Index n beschreibt den Iterationsschritt, an dem die Monopolquelle hinzugefügt wurde.

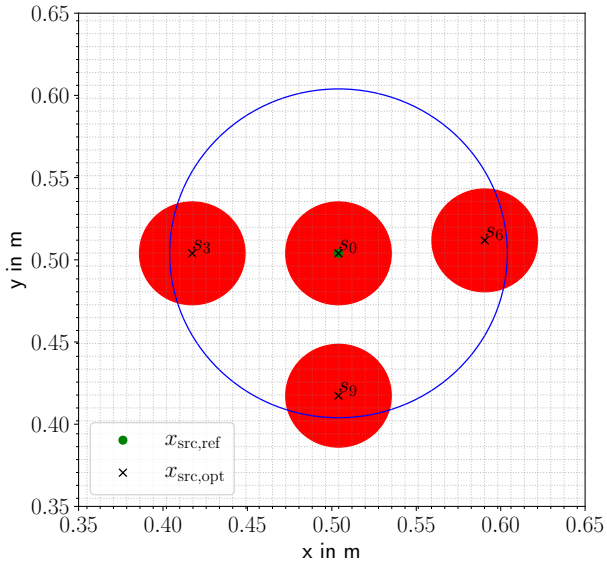


Abbildung 4: Gefundene Monopolquellpunkte in der x_1-x_2-Ebene ($x_3 = 0.5$ m) sind als 'x' dargestellt. Der blaue Kreis stellt die zulässige Quellregion mit einem Radius von 0.1 m um den Referenzquellpunkt dar. Die rot gefärbten Kreise beschreiben die Quellausdehnung χ der Monopolquellen. Das gezeigte Koordinatennetz entspricht der räumlichen Diskretisierung.

um Überlappungen der einzelnen Monopolausdehnungen zu verhindern. Hier empfiehlt sich die alternative gitterbasierte Monopolsynthese (B).

Gitter-basierte Monopole (B)

Als Beispiel für die gitter-basierte Monopolsynthese wird ein Kolbenstrahler in einer unendlichen Wand synthetisiert. Ein Kolbenstrahler eignet sich als Anwendungsbeispiel, da seine frequenzabhängige Richtcharakteristik eine vergleichbare Komplexität wie ein in der Praxis eingesetzter Tief-Mitteltöner (mit einem Treiber) besitzt.

Das Rechengebiet erstreckt sich für alle drei Raumrichtungen von -0.5 m bis 0.5 m und ist mit $124 \times 124 \times 62$ Gitterpunkten diskretisiert. Die Referenzquelle ist mittig bei $x_{\mathrm{src,ref}} = [0.0, 0.0, 0.0]$ m positioniert.

Auch für den hier betrachteten Fall eines Kolbenstrahlers kann das Referenzschallfeld direkt aus einem Complex-Directivity-Point-Source Modell abgeleitet werden. Abbildung 5 skizziert die geometrische Anordnung, wobei für die folgende Diskussion insbesondere der Winkel β zur Hauptabstrahlachse (x_1) zu beachten ist.

Im Folgenden werden die Resultate für verschiedene monofrequente Anregungssignale des Kolbenstrahlers diskutiert. Beliebige Eingangssignale folgen hieraus entsprechend dem Superpositionsprinzip der linearen Akustik.

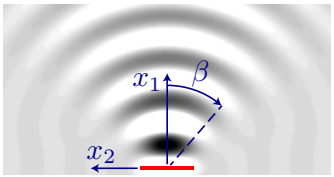
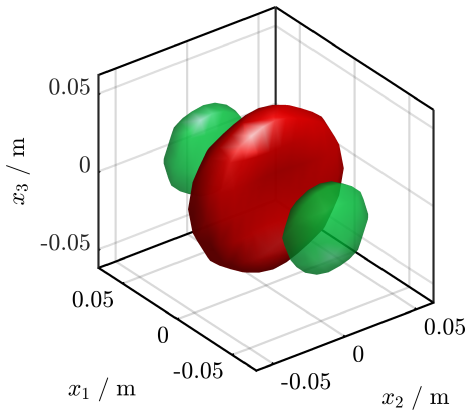


Abbildung 5: Koordinatensystem und resultierendes Schallfeld des Kolbenstrahlers bei 2 kHz. Die Kolbenstempelfläche (rote Linie) ist in der $x_2 - x_3$-Ebene ausgerichtet. x_1 ist die Hauptabstrahlachse. Der Kolbendurchmesser beträgt 164 mm. Der Kolbenmittelpunkt liegt bei $[0, 0, 0]$ m.

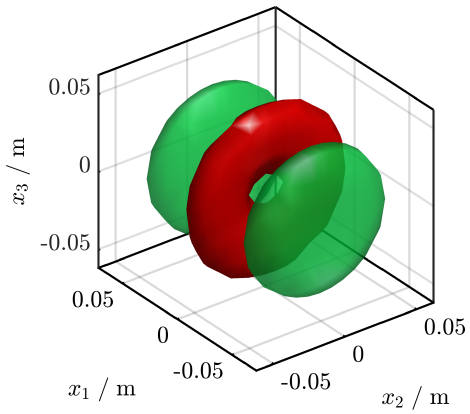
Um eine repräsentative Größe der vierdimensionalen Monopolverteilung $\hat{s}_i(x_j, t)$ zur Visualisierung abzuleiten, wird die folgende zeitliche Mittelungsoperation definiert:

$$\langle \hat{s}_i(x_j, t) \rangle = \Delta t \sum_{\forall\,\mathrm{timesteps}} \mathrm{sign}\left[\hat{s}_{i_0}(x_{j,0}, t)\right] \hat{s}_i(x_j, t). \quad (5)$$

Dabei ist $\langle \hat{s}_i \rangle$ direkt proportional zur Amplitude eines Monopolsignals. Wie p' ist auch $\langle \hat{s}_i \rangle$ eine kleine Schwankung um Null in Pa. Um die Phaseninformationen zu erhalten, werden keine absoluten $\hat{s}_i$-Werte durch (5) summiert, sondern Werte mit einem relativen Vorzeichen bezüglich zur Position $x_{j,0}$ bei $x_1 = 0.04$ m auf der Hauptabstrahlachse. Die Abbildung 6 zeigt Isoflächen, die alle Monopolpositionen mit derselben Amplitude von $\langle \hat{s}_i \rangle$ verbinden. Entsprechend der Referenzquelle zeigen die Isoflächen eine Rotationssymmetrie um die Hauptabstrahlachse (x_1) und eine Spiegelsymmetrie bezüglich der x_2-x_3-Ebene. Je tiefer die Frequenz, desto gleichmäßiger wird die Richtwirkung des Kolbenstrahlers. So wäre bei 1 kHz eine Sphäre in der Mitte zu sehen (hier aus Platzgründen nicht dargestellt). Bei 2 kHz wird der Dipolcharakter des Kolbens durch zwei Seiten-Ellipsoiden ersichtlich, in entgegengesetzter Phase zur zentralen Sphäre. Bei 3 kHz beginnt sich im abgestrahlten Schallfeld, bei $\beta = 90°$, eine Nebenkeule zu bilden. Dementsprechend verwandelt sich die Zentralsphäre der Monopolverteilung in einen Torus. Abbildung 7 zeigt den resultierenden relativen Schalldruckpegel von den zur Synthese verwendeten Monopole bei 2 bzw. 3 kHz. Zum Vergleich wird auch der Schalldruckpegel des Referenz-Schallfeldes p'_{ref} über β aufgetragen. Die maximale Abweichung zwischen dem



(a) 2 kHz



(b) 3 kHz

Abbildung 6: Isoflächen der Monopolsignalamplitude mit $\langle \hat{s}_i \rangle$-Werten von 0.4 (grün) und 0.8 (rot).

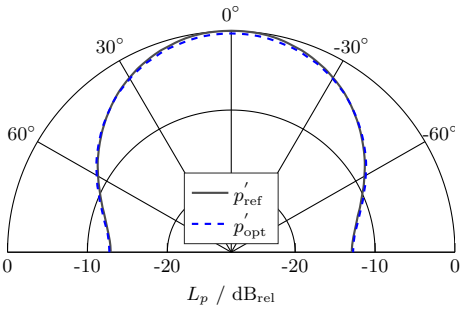
ursprünglichen Schallfeld und dem durch gitter-basierten Monopolsynthese erzeugten Schallfeld ist für beide Frequenzen kleiner als 0.3 $\mathrm{dB_{rel}}$.

Damit wurde gezeigt, dass ein Kolbenstrahler und seine komplexe Richtcharakteristik mittels gitter-basierter Monopolsynthese genau modelliert und simuliert werden kann. Quantitativ entspricht die Genauigkeit der Rekonstruktion den praktischen Anforderungen von Soundsystem-Design-Tools.

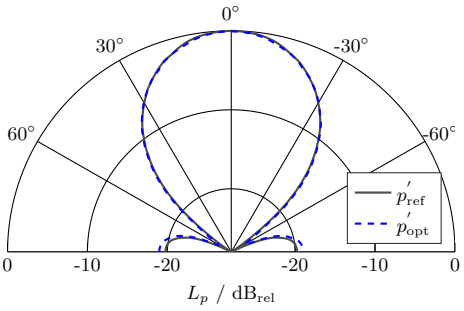
Zusammenfassung

Vorgestellt wurde eine Adjungierten-basierte Monopolsynthese im Zeitbereich. Im Detail wurden unterschiedliche Formulierungen erfolgreich getestet und validiert. Bei Verwendung räumlich aufgelöster Monopole (A) bietet die Adjungierten-basierte Methode Vorteile hinsichtlich einer optimalen Positionierung der Monopolquellen. Durch Verwendung einer gitter-basierten Monopolsynthese (B) lassen sich komplexe Quellen numerisch effizient synthetisieren. Beiden Formulierungen ist gemein, dass die Analyse im Zeitbereich die Berücksichtigung inhomogener Windprofile und Temperaturschichtungen erlaubt [3].

In einem nächsten Schritt wollen wir mehrere Lautsprecher bei komplexen Umgebungsbedingungen synthetisieren und simulieren, unter Berücksichtigung un-



(a) 2 kHz



(b) 3 kHz

Abbildung 7: Relativer SPL in Abhängigkeit von β des originalen Kolbenstrahlers und der gitter-basierten Monopolsynthese.

erwünschter Verzerrungseffekte, die durch Umgebungsbedingungen verursacht werden. Bei idealisierten Lautsprechern mit Monopol-Charakteristik erfolgte dies bereits [3].

Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung im Rahmen der Projekte LE 3888/2 und WE 4057/16.

Literatur

[1] M. Lemke. *Adjoint based data assimilation in compressible flows with application to pressure determination from PIV data.* PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2015.

[2] M. Lemke und L. Stein. Adjoint-based identification of sound sources for sound reinforcement and source localization. Accepted for publication in *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2020.

[3] L. Stein, F. Straube, J. Sesterhenn, S. Weinzierl, und M. Lemke. Adjoint-based optimization of sound reinforcement including non-uniform flow. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 146(3):1774–1785, 2019.

[4] L. Stein, F. Straube, J. Sesterhenn, S. Weinzierl, und M. Lemke. Adjoint-based sound reinforcement in the time domain. In *Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics*, 2019.