Messtechnische Analyse von Schallmoden in Strömungen mit Umfangsinhomogenitäten

Lukas Klähn, Maximilian Behn und Lars Enghardt

DLR, Institut für Antriebstechnik, Triebwerksakustik, 10623 Berlin, Deutschland, Email: Maximilian.Behn@dlr.de

Einleitung

Im Kontext neuer Flugzeugkonzepte werden alternative Positionen der Triebwerke, etwa eingebettet in den Rumpf, diskutiert. Ein in Hinsicht auf die aerodynamische Effizienz vielversprechendes Konzept sieht das Einsaugen der Rumpfgrenzschicht (Boundary Layer Ingestion - BLI) durch das Triebwerk vor, wodurch es zu einer über den Triebwerksquerschnitt ungleichmäßigen Strömung kommt (Abb. 1).

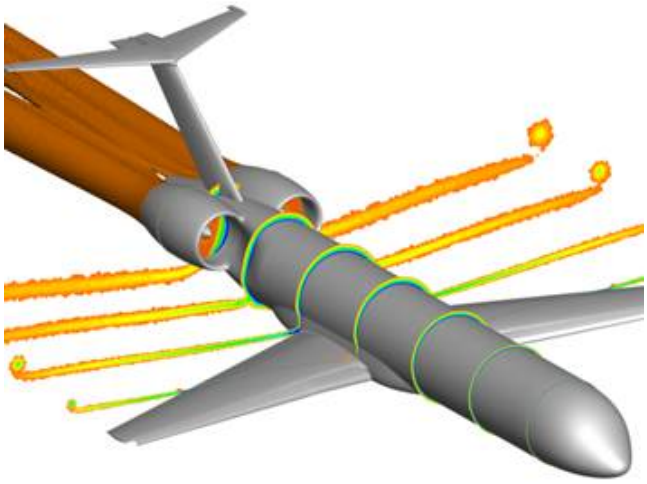

Abbildung 1: TULAM-Flugzeugkonfiguration mit in den Rumpf eingebetteten Triebwerken, dargestellt ist der Totaldruck. DLR, Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Transportflugzeuge.

Die Schallausbreitung in Strömungskanälen mit radialen Strömungsprofilen kann mit der Pridmore-Brown Gleichung beschrieben werden und ist Gegenstand zahlreicher Studien. Neben einigen analytischen Näherungsverfahren [1, 2] werden numerische Eigenwertlöser [3] eingesetzt. Die radialen Strömungsgradienten führen zu einer Brechung der Schallmoden in Abhängigkeit von Frequenz, Modenordnung, Ausbreitungstrichtung, Machzahl und Strömungsprofil.
Die Schallausbreitung in Strömungskanälen mit Umfangsinhomogenitäten ist für moderne Flugzeugkonzepte von Interesse. Hierbei existieren zwei unterschiedliche Anschauungen. In numerischen Studien wird die Schallausbreitung von durch die Rotor-Stator-Interaktion angeregten Schallmoden, wie sie in einer gleichmäßigen Strömung vorkommen (Plug-Flow Moden), in der ungleichmäßigen Strömung untersucht [4, 5, 6]. Die Ergebnisse zeigen, dass die Modenamplituden der Plug-Flow Moden abhängig sind von der axialen Koordinate und Schallenergie in benachbarte Umfangsordnungen verteilt wird. In numerischen Studien kann das Schallfeld an jeder axialen Position in der Plug-Flow Modenbasis dargestellt werden. In experimentellen Messungen mit wandbündigen Mikrofon-Ringarrays wird das Schalldruckfeld hingegen nur an einzelnen, in manchen Fällen nur an einer, axialen Position gemessen. Die Umverteilung der Schallenergie hat einen signifikanten Einfluss auf die Richtcharakteristik im Fernfeld [5]. Um die Modenspektren auch außerhalb der Messposition darzustellen, müssten die Verläufe der Modenamplituden bestimmt werden, dies ist numerisch möglich, wobei der Verlauf der Amplituden in dünnen Ringkanälen mit Bessel-Funktionen beschrieben werden kann [6].
In der Arbeit von Sofrin und Cicon wird eine alternative Modenbasis eingeführt, deren Moden aus einer Superposition der Plug-Flow Moden bestehen und in axialer Richtung, bis auf eine Phasenverschiebung, konstant sind. Werden diese Moden an verschiedenen axialen Positionen in die Plug-Flow Basis überführt, zeigen die Modenamplituden ähnliche Verläufe wie in numerischen Studien [4, 6]. Zwischen den einzelnen Moden tritt beim Modell von Sofrin und Cicon keine Streunung der Schallenergie auf. Die Modenformen werden durch die ungleichmäßige Strömung gebrochen, bleiben jedoch weiterhin als einzelne Moden mit einer Wellenzahl bestehen. Die Modenformen werden mit einem iterativen Verfahren bestimmt und bilden, zusammen mit den axialen Wellenzahlen, eine Basis aus Eigenlösungen des Systems [7].
In dieser Arbeit wird eine analytische Modenbasis verwendet, die von der Anschauung einer globalen Basis aus Eigenlösungen ausgeht. Das Modell basiert auf der Störungsrechnung nach Lindstedt & Poincaré [8] und konnte für kleine Machzahlen als Näherungslösung validiert werden [9]. Zunächst wird das grundlegende Konzept des Modenmodells beschrieben. Anschließend wird eine Modenbasis für eine in radialer und Umfangsrichtung ungleichmäßige Strömung bestimmt und auf die praktische Anwendbarkeit bei Schallfeldmessungen mit Mikrofonringen untersucht.

Bestimmung der Schallmoden mittels Störungsrechnung

Die Störungsrechnung ist etwa bei der Analyse von nichtlinearen Differentialgleichungen (DGLen) ein etabliertes mathematisches Näherungsverfahren [8]. Das Verfahren wird bei DGLen verwendet, die einer geschlossen lösbaren DGL ähneln. Hier wird eine DGL verwendet, die der bekannten Wellengleichung unter ebenen Strömungsbedingungen ähnelt. Betrachtet wird ei-

ne Strömung in der Viskosität und Volumenkräfte vernachlässigbar sind. Massenquellen und -senken werden ausgeschlossen. Die Machzahl sei klein mit kleinen Gradienten in radialer und Umfangsrichtung, $M = M_x(r, \theta)$. Ausgehend von der Massen- und Impulsbilanz wird folgende partielle DGL bestimmt [9]:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}\,t^2}p' - \Delta p' = 2\rho c\left(\frac{\partial M_x}{\partial r}\frac{\partial u_r'}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta'}{\partial x}\frac{\partial M_x}{\partial \theta}\right). \quad (1)$$

Akustische Größen sind mit einem Apostroph gekennzeichnet. ρ bezeichnet die statische Dichte, c die Schallgeschwindigkeit und x, r, θ die verwendeten Zylinderkoordinaten. Auf der linken Seite von Gl. (1) steht der Wellenoperator in einem bewegten Fluid, mit $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}$ der substantiellen Zeitableitung und Δ dem Laplace Operator. Die Lösung der Wellengleichung ist für eine gleichmäßige Kolbenströmung mit den Plug-Flow Moden geschlossen möglich. Wird nur eine radial ungleichmäßige Strömung betrachtet, führt obige Gleichung auf die Pridmore-Brown Gleichung [2]. Da hier die Strömung sowohl in radialer als auch in Umfangsrichtung ungleichmäßig ist, kann die Gleichung nicht bezüglich aller Variablen separiert werden, sondern lediglich für die axiale Koordinate x und die Zeit t:

$$p' = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^{\pm} F_{mn}^{\pm}(r,\theta)\, e^{j(k_{mn}^{\pm}x - \omega t)}. \quad (2)$$

Hier bezeichnet $A_{mn}^{\pm}$ die Modenamplitude, $F_{mn}^{\pm}$ die Modenformfunktion und $k_{mn}^{\pm}$ die axiale Wellenzahl einer Mode mit azimutaler Ordnung m und radialer Ordnung n in stromab (+) bzw. stromauf (−) laufender Richtung. ω ist die Kreisfrequenz. Für die Schnellekomponenten werden analoge Ansätze gewählt. Eingesetzt in Gl. (1) ergibt sich die konvektive Helmholtz-Gleichung:

$$\begin{aligned}&\left((k - M_x k_{mn}^{\pm})^2 - (k_{mn}^{\pm})^2 + \Delta_\perp\right)\{F_{mn}^{\pm}\} \\ &= \frac{-2k_{mn}^{\pm}}{\left(k - M_x k_{mn}^{\pm}\right)}\left(\frac{\partial M_x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial M_x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\{F_{mn}^{\pm}\},\end{aligned} \quad (3)$$

mit $\Delta_\perp$ dem zweidimensionalen Laplace Operator in der $r-\theta$ Ebene und k der Wellenzahl im Freifeld. Für die Störungsrechnung werden die Machzahl, die Modenformfunktion und die axiale Wellenzahlen mit dem Störparameter $\varepsilon \ll 1$ in Potenzreihen entwickelt:

$$M_x(r,\theta) = M_{x,0} + \varepsilon M_{x,1}(r,\theta) + \cdots, \quad (4)$$

$$F_{mn}^{\pm}(r,\theta) = F_{mn,0}^{\pm}(r,\theta) + \varepsilon F_{mn,1}^{\pm}(r,\theta) + \cdots, \quad (5)$$

$$k_{mn}^{\pm} = k_{mn,0}^{\pm} + \varepsilon k_{mn,1}^{\pm} + \cdots. \quad (6)$$

wobei hier nur die nullte und erste Potenz von ε berücksichtigt werden. Die Ansätze in (4) bis (6) werden in Gl. (3) eingesetzt. Sortieren nach den Potenzen von ε ergibt für die nullte Ordnung die bekannte homogene konvektive Helmholtz-Gleichung für eine Kolbenströmung. Mit der Randbedingung schallharter Wände ergeben sich in allen Variablen separierbare modale Lösungen, die als Plug-Flow Moden bezeichnet werden und in [10] beschrieben sind.
Um die Gleichung erster Ordnung zu lösen, wird $M_{x,1}$ in Umfangsharmonische zerlegt:

$$M_{x,1}(r,\theta) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} M_{x,1}^{\mu}(r)\, e^{j\mu\theta}, \quad (7)$$

μ wird hier als Brechungsordnung bezeichnet. Analog wird die erste Ordnung der Eigenfunktion $F_{mn,1}^{\pm}$ bezüglich der Brechungsordnungen zerlegt:

$$F_{mn,1}^{\pm}(r,\theta) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} f_{mn,1}^{\mu,\pm}(r)\, e^{j(m+\mu)\theta}. \quad (8)$$

Für jede Brechungsordnung μ wird nun eine inhomogene partielle DGL aufgestellt, die jeweils mit dem Verfahren der Variation der Konstanten gelöst werden kann.
Die Gesamtlösung wird in erster Näherung durch die Plug-Flow Moden beschrieben. In zweiter Näherung sind auch Anteile von anderen Umfangsharmonischen in der Lösung enthalten.

Schallmoden bei Grenzschichteinsaugung (BLI) in Berlin

Am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) wird ein Prüfstand aufgebaut, mit dem Einlaufstörungen und daraus resultierende akustische Effekte gezielt untersucht werden können. Der Messkanal ist für eine mittlere Machzahl bis $M_{x,0} = 0{,}165$ ausgelegt, bei einem Außenradius von etwa $R = 0{,}23\,\mathrm{m}$. Diese Werte werden auch in dieser Studie verwendet. Um die grundlegenden Brechungseffekte einer ungleichmäßigen Strömung zu erfassen wird das Strömungsprofil

$$M_x = M_{x,0}(1 + \varepsilon\, r\cos\theta) \quad (9)$$

betrachtet. Mit einer Störung von 10 % ($\varepsilon = 0{,}1$) ist das Strömungsprofil in Abbildung 2 dargestellt. In kartesischen Koordinaten steigt die Strömung linear in vertikaler Richtung. In den für das Modenmodell verwendeten Zylinderkoordinaten ergibt sich eine Abhängigkeit von r und θ.

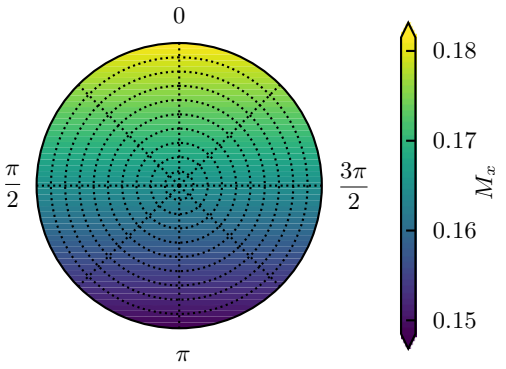

Abbildung 2: Strömungsprofil mit BLI

In dieser Arbeit wird ein Ringarray aus 61 äquidistant angeordneten Mikrofonen betrachtet. Da das Mikrofonarray stromauf der Schallquelle, der Rotor-Stator-Stufe liegt, werden nur stromauf laufende Moden betrachtet. Zudem ist die Analyse auf die nullte radiale Modenordnung $n = 0$ beschränkt, da mit nur einem Ringarray eine Trennung der axialen Wellenzahlen nicht möglich ist.
In Abbildung 3 ist die stromauf laufende Mode $(1, 0)$ bei einer Helmholtz-Zahl von $kR = 10$ dargestellt. Die Um-

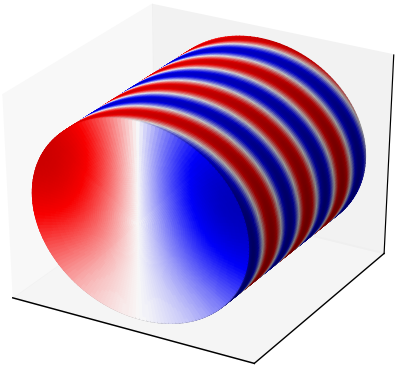

Abbildung 3: BLI Mode $(1,0)$ bei 10 % Störung der Strömung, Helmholtz-Zahl $kR = 10$.

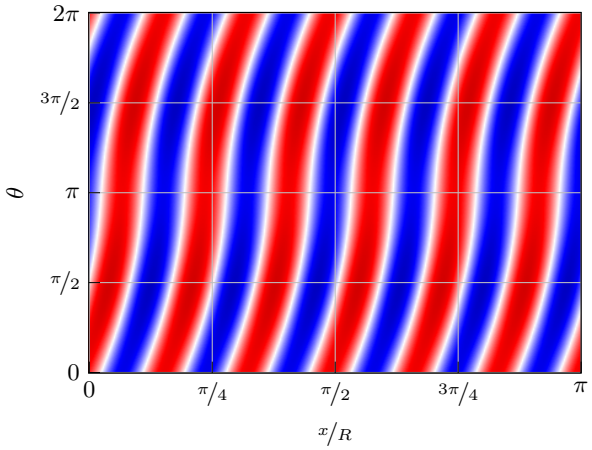

Abbildung 4: BLI Mode $(1,0)$ bei 10 % Störung der Strömung, Schalldruck an der Außenwand, Helmholtz-Zahl $kR = 10$.

fangsordnung $m = 1$ ist eindeutig zu erkennen, jedoch wird die Schallenergie durch den Gradienten der Strömung nach oben hin gebrochen.
Die Grundgleichung der Azimutalmodenanalyse (AMA) für eine ebene Kolbenströmung lautet [10]:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{a}\,, \tag{10}$$

$$w(m,n|x,r,\theta) = \hat{F}^{\pm}_{mn}(r) e^{j(m\theta + k^{\pm}_{mn} x - \omega t)}\,, \tag{11}$$

mit $\boldsymbol{p}$ dem komplexen Schalldruckvektor der Mikrofonsignale, $\boldsymbol{a}$ dem Vektor der Modenamplituden und $\boldsymbol{W}$ der Modellmatrix. Die Einträge der Modellmatrix werden bestimmt durch die Modenordnungen und Mikrofonpositionen. $\hat{F}^{\pm}_{mn}(r)$ bezeichnet die radiale Modenfunktion in einer Kolbenströmung.
Die Analyse mit den BLI-Moden geschieht analog:

$$\boldsymbol{p} = \widetilde{\boldsymbol{W}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{a}}\,, \tag{12}$$

$$\widetilde{w}(m,n|x,r,\theta) = F^{\pm}_{mn}(r,\theta) e^{j(k^{\pm}_{mn} x - \omega t)}\,. \tag{13}$$

Der Modenvektor der BLI-Moden und die zugehörige Modellmatrix werden mit einer Tilde markiert. Die Modenformfunktion $F^{\pm}_{mn}(r,\theta)$ kann hier nicht mehr mit einem einfachen Produktansatz separiert werden. Die Lösung der Gl. (10) und (12) erfolgt durch Minimierung der Fehlerquadrate mittels der Pseudoinversen:

$$\boldsymbol{W}^{\dagger} = \left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}} \cdot \boldsymbol{W}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\,. \tag{14}$$

In Abb. 5 ist ein synthetisiertes Schallfeld in den beiden Modenbasen dargestellt. In der Plug-Flow Basis sind die

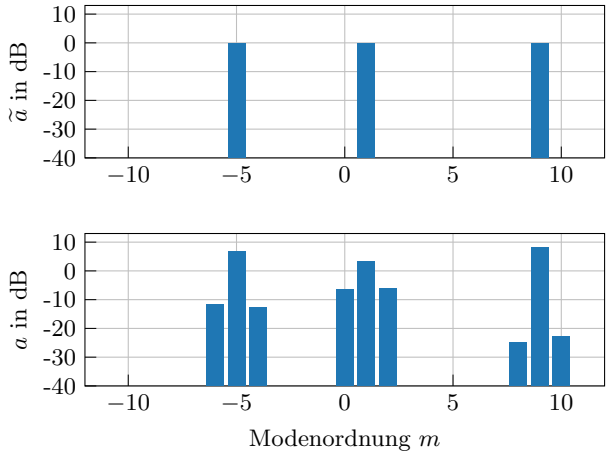

Abbildung 5: Modenamplitunden in der BLI Modenbasis (oben) und in der Plug-Flow Modenbasis (unten) [9]

einzelnen Umfangsordnungen der BLI Moden zu erkennen. Da die Inhomogenität der Strömung rein harmonisch ist, ohne höhere Harmonische, sind nur die Ordnungen $m-1$, m und $m+1$ vorhanden. In beiden Darstellungen wird das selbe Schallfeld an der Außenwand an einer axialen Position reproduziert. Im Kanalinneren werden jeweils andere Schalldruckprofile angenommen, daher unterscheiden sich auch die modalen Amplituden in beiden Modellen. Bei der Modellierung der Schallausbreitung unterscheiden sich die Modelle zudem durch die axialen Wellenzahlen. Die Brechung der Moden nimmt mit steigender Modenordnung ab, dies entspricht auch dem Verhalten bei rein radialen Grenzschichten. Zudem werden die Moden mit steigender Frequenz und steigender Machzahl stärker gebrochen, analog zu der radialen Brechung bei radialen Grenzschichten. [3]

Einfluss des Modenmodells auf die Azimutalmodenanalyse

Eine Abschätzung der Qualität der Lösung kann die Arraykohärenz liefern. Diese ist definiert als maximale Kreuzkorrelation der Spalten von $\boldsymbol{W}$ bzw. $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ [11]:

$$\gamma\left(\boldsymbol{W}\right) = \max_{i \neq j} \frac{|\boldsymbol{w}_i^H \cdot \boldsymbol{w}_j|}{||\boldsymbol{w}_i||_2 ||\boldsymbol{w}_j||_2}\,. \tag{15}$$

Die Array-Kohärenz steht im direkten Zusammenhang mit der Höhe der Nebenkeulen des Arrays und der Kehrwert der Kohärenz entspricht der maximalen Anzahl an detektierbaren dominanten Moden [11]. In Abb. 6 ist die Arraykohärenz der Modellmatrizen des Plug-Flow Modells (gestrichelt) und des BLI Modells (durchgezogen)

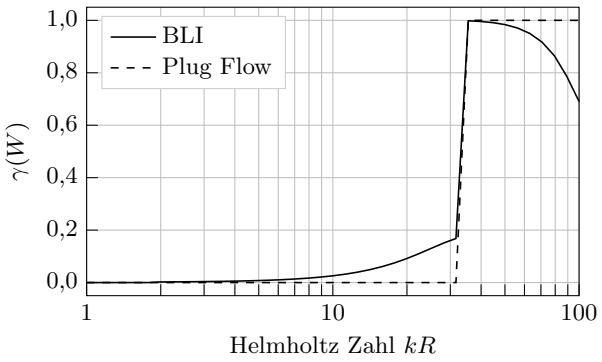

Abbildung 6: Array-Kohärenz eines Äquidistanten Ringarrays unter Verwendung der Plug-Flow Moden (gestrichelt) und der BLI-Moden [9]

für einen Mikrofonring aus 61 äquidistant angeordneten Mikrofonen dargestellt. Mit dem Plug-Flow Modell ist die Kohärenz null, wenn weniger als 62 azimutale Modenordnungen ausbreitungsfähig sind und springt auf den Wert 1, sobald mit der 62-ten Azimutalmode Aliasing auftritt. Dies ist ab ca. $kR \approx 30$ der Fall. Die Moden der BLI-Modenbasis sind zueinander nicht orthogonal, da eine BLI Mode mehrere Umfangsordnungen enthält. Die Arraykohärenz der BLI-Modellmatrix steigt ab der cut-on-Frequenz der ersten Azimutalmode kontinuierlich, bleibt jedoch bis zur kritischen Frequenz bei etwa $kR \approx 30$ unter dem Wert 0,17. Es sei noch erwähnt, dass die Moden dennoch zum größten Teil unkohärent sind. Hohe Kohärenzen treten lediglich zwischen benachbarten Modenordnungen mit niedriger Ordnung auf, insbesondere zwischen den Moden (0,0) und (±1,0), da diese am stärksten gebrochen werden.

Fazit und Ausblick

Das Konzept von einer alternativen Modenbasis mit axial konstanten Modenamplituden ist ein vielversprechender Ansatz um die Schallausbreitung in ungleichmäßigen Strömungen zu beschreiben. Das vorgestellte Modell hilft, die durch eine eingesaugte Grenzschicht zu erwartenden Brechungseffekte zu verstehen und zu analysieren. Aufgrund der gebrochenen Schallmoden, die kein Orthogonalsystem bilden, ist die Kohärenz der Modellmatrix größer als im Plug-Flow Fall. Mit einer optimierten Arraygeometrie kann die Kohärenz verringert und die experimentelle Azimutalmodenanalyse verbessert werden. Die theoretische Betrachtung zeigt, dass bereits bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten und kleinen Strömungsgradienten signifikante Brechung der Schallmoden zu erwarten ist. Messtechnische Untersuchungen zur Schallausbreitung in ungleichmäßiger Strömung sind daher von großem akademischen und praktischen Interesse. Ein numerischer Eigenwertlöser, der radiale und azimutale Strömungsgradienten berücksichtigt, könnte das Verständnis über die Brechung der Moden, insbesondere bei höheren Machzahlen, verbessern.

Literatur

[1] Shankar, P.: On acoustic refraction by duct shear layers. Journal of Fluid Mechanics 47 (1971), 81–91.

[2] Pagneux, V. und Froelich, B.: Influence of Low Mach Number Shear Flow on Acoustic Propagation in Ducts. Journal of Sound and Vibration 246.1 (2001), 137–155.

[3] Spitalny, M. und Tapken, U.: Radial Mode Analysis of Ducted Sound Fields with Sensor Rakes and Wall Flush Sensor Arrays under Consideration of a Radial Flow Profile. 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Lyon, 2016, AIAA 2016–3037.

[4] Prinn, A. G., Astley, R. J. und Sugimoto, R.: Predicting the effect of flow distortion on in-duct acoustic propagation. 22nd International Congress on Sound and Vibration. Florence, 2015

[5] Prinn, A. G., Sugimoto, R. und Astley, R. J.: The Effect of Steady Flow Distortion on Noise Propagation in Turbofan Intakes. 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Lyon, 2016, AIAA 2016-3028

[6] Guérin, S., Vogt, M. und Holewa, A.: Multiple Scattering of Acoustic Waves in Potential Mean Flow With Circumferential Distortion. 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2017, AIAA 2017-3197

[7] Sofrin, T. und Cicon, D.: Ducted fan noise propagation in non-uniform flow. II - Wave equation solution. 11th Aeroacoustics Conference. 1987, AIAA 1987-2702

[8] Shivamoggi, B. K.: Perturbation Methods for Differential Equations. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003,

[9] Klähn, L.: Modellierung der Schallausbreitung in Kanälen mit ungleichmäßiger Strömung mittels der regulären Störungsrechnung. Masterarbeit. Technische Universität Berlin, 2019

[10] Tapken, U.: Analyse und Synthese akustischer Interaktionsmoden von Turbomaschinen. Dissertation. Technische Universität Berlin, 2016

[11] Behn, M., Kisler, R. und Tapken,U.: Efficient Azimuthal Mode Analysis using Compressed Sensing. 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, 2016, AIAA 2016-3038