Akustische Black-Hole-Analogie mit exakter Raumzeitrepräsentation

Roland Ewert[1,2], Stanislav Proskurov[1]

[1] DLR, Inst. f. Aerodynamik und Strömungstechnik, Technische Akustik, 38108 Braunschweig, Deutschland

[2] Email: Roland.Ewert@dlr.de

Einleitung

Beginnend mit der Arbeit von W. Unruh 1981 [1] wird im Rahmen von Analogmodellen (Analogue Models) der intrinsische Zusammenhang zwischen Strömungsakustik und Wellenpropagation in gekrümmter Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) studiert. Obwohl die Strömungsakustik auf klassisch nicht-relativistischer Newtonscher Physik in flacher Raumzeit basiert, kann die Ausbreitung von Schallwellen im strömenden Medium durch eine effektive akustische Metrik in einer 3+1-dimensionalen Lorentz-Raumzeit beschrieben werden, aus der ein Analogon zwischen Schwarzen Löchern (Black-Holes) mit Schwarzschild-Metrik und einer einfachen Überschall-Senkenströmung (Sonic Black-Hole) hergeleitet werden kann. Die Erweiterung des akustischen Analogmodells mittels Acoustic Perturbation Equations (APE) zur exakten Repräsentation der Schwarzschild-Metrik wird aufgezeigt. Simulationsergebnisse für ein akustisches Black-Hole mittels Simulationsmethoden der Computational Aeroacoustics (CAA) werden vorgestellt.

Einige Grundlagen

In der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ist die Wellenausbreitung in einer gekrümmten Raumzeit mit Vakuum-Lichtgeschwindigkeit für ein minimal gekoppeltes masseloses Skalarfeld φ durch den erweiterten d'Alembert Operator

$$\Box\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) = 0 \tag{1}$$

definiert [2, 3]. Hierbei bezeichnet $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ partielle Ableitung bezüglich der kontravarianten 4-Vektor Komponenten

$$(x^\mu) \equiv \left(t; x^i\right)^T. \tag{2}$$

Griechische Indizes in dem Ausdruck laufen von 0 bis 4. Die Nullkomponente beschreibt die zeitliche Koordinate, die Komponenten 1-3 räumliche Koordinaten. Hochgestellte Indizes definieren kontravariante, tiefgestellte Indizes kovariante Tensorkomponenten. Einsteins Summenkonvention gilt für Produkte von Größen mit paarweise hoch- und tiefgestellten Indizes[1].

Des Weiteren definiert $g^{\mu\nu}$ den kontravarianten metrischen 4×4 Tensor der Raumzeit (Lorentzian spacetime) und $g \equiv det\,(g_{\mu\nu})$ ist die Determinante der zugehörigen kovarianten metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$. Wie weiter unten kurz aufgeführt, ist die Determinante aufgrund der Signatur des Tensors negativ, d.h. $\sqrt{-g}$ eine reelle Größe.

[1] Für eine Einführung in die mathematischen Grundlagen der ART sei z.B. insbesondere auf [4] verwiesen.

Der metrische Tensor beschreibt Gravitation als Krümmung der Raumzeit und ersetzt damit das klassische Newtonsche Gravitationsfeld. D.h. eine Gravitationskraft existiert in diesem Bild nicht mehr. Eine geodätische Linie in der allgemein gekrümmten Raumzeit (Weltlinie) ist die konzeptionelle Erweiterung einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung in einer (flachen) Newtonschen Raumzeit. Die beobachteten Bahnkurven der Himmelsmechanik folgen dann aus dieser **kinematischen** Beschreibung[2].

Daneben definieren die **dynamischen** Grundgleichungen der ART, wie die Raumzeit durch die Anwesenheit von Masse (aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie, ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor zweiter Stufe $T_{\mu\nu}$) gekrümmt wird:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{3}$$

In der dynamischen Grundgleichung (Einstein Gleichung) bezeichnet $G_{\mu\nu}$ den Einstein-Tensor zweiter Stufe, der als eine nichtlineare Funktion des metrischen Tensors und seiner Differenziale erstmals auf Basis physikalischer Grundüberlegungen von Einstein abgeleitet worden ist. Die Tensoren auf der rechten und linken Seite sind durch eine Konstante $\kappa = 8\pi G/c^4$, basierend auf Gravitationskonstante G und Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c, gekoppelt. Dieser Zusammenhang wird auch durch das berühmte Wheeler-Zitat "*Spacetime tells matter how to move*" (**kinematische** Grundgleichungen), "*matter tells spacetime how to curve.*" (**dynamische** Grundgleichungen) prägnant zusammengefasst.

Kovarianter und kontravarianter metrischer Tensor sind durch die Beziehung

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta \end{cases} \tag{4}$$

miteinander verknüpft, d.h. sind orthogonal zueinander.

Für eine flache Minkowski-Raumzeit ohne Gravitation ist der kovariante metrische Tensor durch $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ mit

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

[2] Die Krümmung des Raumes z.B. im Sonnensystem ist dabei marginal, z.B. messbar durch die minimale Merkur-Periheldrehung von 43"/100a [4], der wesentliche Effekt ergibt sich aus der Krümmung der Weltlinie in der Raumzeit, siehe z.B. die Diskussion in H. Vogel: *Gerthsen Physik*, S. 863 [5].

gegeben. Geeignet entdimensionalisierte Variablen (mit $c = 1$) liefern eine Matrix mit Signatur $(-,+,+,+,)$, daraus folgt der negative Wert der Determinante g des kovarianten metrischen Tensors. Für die Minkowski-Raumzeit folgt $g = -c^2$.

Mit den Koordinatendifferenzialen $(dx^\mu) = (dt, dx, dy, dz)^T$ ergibt sich daraus das Linienelement der 4-dimensionalen Minkowski Raumzeit, d.h. das Quadrat des differenziellen Abstands in der flachen Raumzeit,

$$ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6)$$

Eine 4-Vektor-Koordinatentransformationen der Koordinatendifferenziale beschreibt sowohl eine räumliche Rotation und Translation als auch die Transformation zwischen beliebig gleichförmig bewegten Koordinatensystemen (Lorentz-Transformation). Der Lorentz-Skalar ds^2 ist dabei invariant bezüglich beliebiger Koordinatentransformationen. Ein Wert $ds^2 = 0$ erfüllt die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit für beliebige gleichförmig bewegte Bezugssysteme.

Mittels Gl. (4) kann der kontravariante metrische Tensor der Minkowski-Raumzeit mit

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

abgeleitet werden.

Die homogene Wellengleichung (1) ist Teil der **kinematischen** Grundgleichungen der ART. Für eine flache Minkowski-Raumzeit (d.h. ohne Gravitationskrümmung) ergibt die Auswertung von Gl. (1) mit metrischem Tensor Gl. (7) und $\sqrt{-g} = c$,

$$\Box\varphi = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

d.h. die klassische homogene Wellengleichung.

Akustische Metrik

Die konvektive Wellengleichung für die Schallausbreitung durch ein drehungsfreies Hintergrundströmungsfeld ist durch die lineare Differenzialgleichung

$$\frac{D_0}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{D_0\varphi}{Dt}\right) - \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0 \quad (9)$$

gegeben. Hier definiert

$$\frac{D_0}{Dt} := \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\right\}$$

eine substanzielle (totale) Zeitableitung, wobei $\boldsymbol{v}_0 = \left(v_0^1, v_0^2, v_o^3\right)^T$ den Vektor des Hintergrundfeldes bezeichnet. Des Weiteren bezeichnen ρ_0 und c_0 die Dichte und die Schallgeschwindigkeit im Hintergrundfeld, welches sowohl räumlich veränderlich (inhomogen) wie auch zeitlich veränderlich (instationär) sein kann.

Das akustische Feld wird durch das akustische Potenzial φ beschrieben. Die Schallschnelle folgt aus $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\nabla}\varphi$, akustische Druckfluktuationen mittels der linearisierten Impulsgleichung aus $p' = -\rho_0 D_0\varphi/Dt$.

Gl. (9) ist auch als Piercesche approximative Wellengleichung bekannt [6].[3] Der akustische Wellenoperator ist auch die Basis der akustischen Analogien von Möhring [7] und Howe [8].

Wie von Visser gezeigt [3] kann die Wellengleichung (9) unter der Nebenbedingung, dass die Grundströmung die stationäre Kontinuitätsgleichung

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{v}_0) = 0 \quad (10)$$

erfüllt, mit der eingeführten relativistischen Schreibweise in die Form

$$\partial_\mu\left(f^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) = 0, \quad (11)$$

mit akustischer Prämetrik

$$f^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_0^2}\begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -v_0^i & \vdots & c_0^2\delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{bmatrix} \quad (12)$$

gebracht werden ($\delta^{ij} = \delta_{ij} = \delta^i_j$ ist das Kronecker Delta for Koordinatenindizes $i = 1\ldots3$). Formal kann Gl. (11) in die Wellengleichung (1) überführt werden, indem eine kontravariante akustische Metrik definiert wird, die über

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} := f^{\mu\nu} \quad (13)$$

mit Gl. (12) gekoppelt ist. Die Definition in Gl. (13) mit Gl. (12) liefert dann einen expliziten Ausdruck für die kontravariante akustische Metrik und unter Berücksichtigung der Orthogonalität, Gl. (4), letztlich die kovariante akustische Metrik [3]

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c_0}\begin{bmatrix} -\left(c_0^2 - v_0^2\right) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Daraus folgt das akustische Linienelement

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (15)\\ &= \frac{\rho_0}{c_0}\left[-c_0^2dt^2 + \left(dx^i - v_0^i dt\right)\delta_{ij}\left(dx^j - v_0^j dt\right)\right]. \end{aligned}$$

Diese bedeutet zusammengefasst, dass der Effekt des strömenden Mediums durch eine effektive Raumzeitkrümmung im allgemein relativistischen Bild ausgedrückt werden kann. Gelingt es, eine Hintergrundströmung zu finden, deren akustische Metrik Gl. (15) mit einer gewünschten Metrik der ART übereinstimmt, so ist die Lösung der strömungsakustischen Gleichung äquivalent zu einer Lösung der ART.

Es können jedoch nicht alle möglichen Metriken der ART durch eine akustische Metrik ausgedrückt werden. Der

[3] "Approximativ" in der Anwendung von Pierce mit nichtdrehungsfreien Hintergrundfeldern.

symmetrische metrische 4×4 Tensor der ART besitzt 10 unabhängige Komponenten. Die akustische Metrik basiert auf 5 Größen (c_0, ρ_0, $\boldsymbol{v}_0$), von denen die Dichte über die Nebenbedingung Gl. (10) bereits festgelegt ist, d.h. es stehen nur 4 unabhängige Größen zur Verfügung. Die Nebenbedingung erzwingt ausserdem, dass die Metrik statisch ist (Strömung ist stationär).

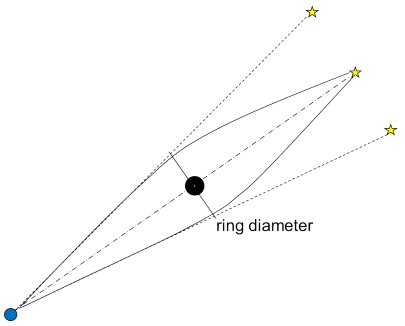

Abbildung 1: Strahlenoptische Krümmung von Lichtstrahlen in nicht-flacher Raumzeit in der Nähe eines Schwarze Lochs; für einen Beobachter erscheint ein punktförmiges Objekt als Ring (Einstein Ring).

Schwarzschild Metrik

Die Schwarzschild-Metrik ist eine exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die ein sphärisches, symmetrisches, nicht-rotierendes Schwarzes Loch beschreibt [4]:

$$ds^2 = -c^2 A dt^2 + A^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad (16)$$

Hier bezeichnen (r, θ, ϕ) sphärische Koordinaten und $A = 1 - r_s/r$. Der Schwarzschild-Radius $r_s := 2GM/c^2$ definiert den Ereignishorizont; Ereignisse innerhalb dieser Grenzfläche sind für Positionen außerhalb nicht beobachtbar. M ist die Masse des Schwarzen Lochs.

Ein Schwarzes Loch macht sich durch die verursachte Raumzeitkrümmung bemerkbar. D.h. Lichtstrahlen, die für einen Beobachter von einem Punktobjekt (Stern) auf Sichtlinie hinter einem Schwarzen Loch ausgesendet werden, werden derart gekrümmt, dass sie dem Beobachter zu einem Ring verzerrt erscheinen (Einstein-Ring), siehe Abb. 1.

Akustische Schwarzschild-Metrik

Wie von Visser gezeigt [3], kann die akustische Metrik Gl. (13) für eine Senkenströmung, ausgedrückt in sphärischen Koordinaten mittels $\boldsymbol{v}' = \left(v_0^r, v_0^\theta, v_0^\phi\right)^T = \left(v_0^r, 0, 0\right)^T$, und unter Verwendung eine Koordinatentransformation [3] in die äquivalente Form

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_0}\left[-c_0^2 B d\tau^2 + B^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

mit $B = 1 - \left(v_0^r/c_0\right)^2$ gebracht werden (die Senke befindet sich bei $r = 0$). Die beste Approximation an die Schwarzschild-Metrik Gl. (16) erreicht man durch Wahl der (normalisierten) 3-D Senkenströmung

$$\rho_0 = 1, \quad c_0 = 1, \quad v_0^r = -c_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2. \quad (17)$$

Diese erfüllt die Nebenbedingung (10) und führt eingesetzt in die Definition von B zu

$$B = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4. \quad (18)$$

Die Schallgeschwindigkeit nimmt dabei die Rolle der Lichtgeschwindigkeit in der Schwarzschild Metrik ein. Der Radius r_0 definiert die Grenzfläche, an der Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Es wird klar, dass nur eine qualitative Übereinstimmung mit der Schwarzschild Metrik erzielt werden kann, für die $B = 1 - r_0/r$ benötigt wird.

Acoustic Perturbation Equations

Die von Ewert & Schröder [9] vorgeschlagenen Acoustic Perturbation Equations (APE) folgen aus den linearisierten Euler-Gleichungen durch Filterung der nichtakustischen Moden. Als überraschender Aspekt dieses Gleichungssystems stellte sich heraus, dass das Störgleichungssystem ohne weitere Nebenbedingungen in die Form (11) mit Prämetrik (12) gebracht werden kann. Durch Wahl der Hintergrundströmung

$$\rho_0 = 1, \quad c_0 = 1, \quad v_0^r = -c_0 \quad (19)$$

ergibt sich dann eine akustische Metrik, die formal exakt äquivalent zu Gl. (16) (mit c ersetzt durch c_0) mit Koeffizient

$$A = 1 - \frac{r_0}{r} \quad (20)$$

ist, wobei die Grundströmung nicht Kontinuität erfüllt.[4]

Numerische Methode

Zur strömungsakustischen Simulation eines akustischen Schwarzen Loches mittels APE wurde der Discontinuous Galerkin Solver DISCO++ des DLR verwendet. Die Diskretisierung basiert auf Tetraedern mit jeweils 10 Freiheitsgraden (DOFs) pro Element mit 4ter Ordnung räumlicher Genauigkeit. Der Löser wird in einer Frequenzbereichsvariante verwendet. Das kubische Simulationsgebiet hat eine Fernfeldauflösung von 2 Elementen pro dimensionsloser Wellenlänge $\lambda = 1$. Eine Senkenströmung entsprechend Gl. (19) wird verwendet; der Ursprung befindet sich im Zentrum des Kubus. Der dimensionslose Schwarzschild-Radius ist $r_0 = 5$. In unmittelbarer Umgebung des akustischen Schwarzen Loches ist das Rechengebiet verfeinert. Das Kernrechengebiet hat eine Ausdehnung von 100^3 Einheiten und wird von einem 200^3 großen Gebiet umhüllt, das als Dämpfungszone (Sponge Layer) fungiert. Das Gebiet ist mittels 6.7 Mio. Elementen mit 135 Mio. DOFs vernetzt.

Eine akustische Monopolquelle wurde 3 Schwarzschild-Durchmesser oberhalb des Zentrums der Senkenströmung platziert ($y = 30$). In der Ebene $y = -50$ wurden die akustischen Amplituden und Phasen für insgesamt 10.000

[4] Dass die Hintergrundströmung eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen darstellt, ist keine Grundvoraussetzung des strömungsakustischen Analogons und $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}_0) \neq 0$ keine Limitierung für die Realisierungen mittels Simulation. Die Hintergrundströmung der APE könnte auch instationär sein.

diskrete und gleichmäßig verteilte Sampling-Positionen ausgewertet.

Simulationsergebnisse

Abb. 2 zeigt den Realteil des resultierenden Schallfeldes für die Monopolquelle über dem zentralen akustischen Schwarzen Loch. Zu erkennen ist, dass das omnidirektionale Schallfeld in der Umgebung der Senkenströmung durch die Schallausbreitung im inhomogenen strömenden Medium signifikant modifziert wird. Unterhalb des Zentrums entsteht ein Schallfeld mit dem Interferenzmuster eines in der oberen Halbebene liegenden virtuellen Ringspalts. Die Hauptkeule des Interferenzmusters tritt dabei in Verlängerung der Verbindungslinie Quelle-Senke auf.

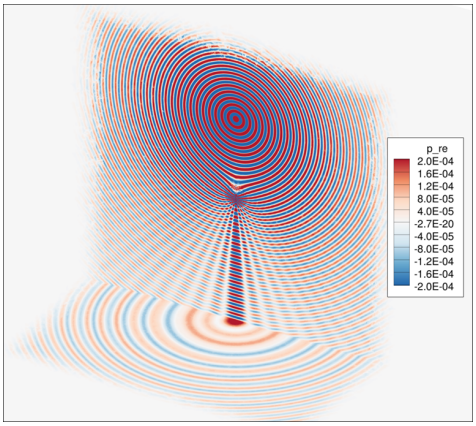

Abbildung 2: Realteil des resultierenden Schallfeldes für ein Monopol über akustischem Schwarzen Loch.

Zur Realisierung eines akustischen Abbildes wurden die Sampling-Daten für jeweils einen Zentralpunkt mit den nächsten Nachbarn zu einem 2700 Punkte-Cluster zusammengefasst und mittels eines einfachen Delay-and-Sum Array-Algorithmus ausgewertet. Innerhalb der quadratischen Sampling-Ebene wurden die Zentralpunkte entlang der Ebenendiagonalen sukzessive verschoben und die akustischen Kamerabilder ausgewertet, Abb. 3 zeigt die Auswertung für 3 Zentralpunktpositionen. Für Zentralpunkte außerhalb der Verbindungslinie Quelle-Senke, Positionen 1 und 3, ergibt sich eine Punktquelle, die leicht aus der zentralen Position verschoben ist. Für diese Positionen führen die Effekte der akustischen Metrik zwar zu einer Verzerrung des Quellabbildes, jedoch bleibt das Bild einer Punktquelle erhalten. Für Position 2 befindet sich der Zentralpunkt direkt auf der verlängerten Verbindungslinie. Die Ausbildung eines Einstein-Rings ist deutlich zu erkennen.

Wir schließen mit dem mahnenden Zitat von M. Visser: *"The acoustic analog for black hole physics accurately reflects half of general relativity—the kinematics due to the fact that general relativity takes place in a Lorentzian spacetime. The aspect of general relativity that does not carry over to the acoustic model is the dynamics—the Einstein equations."*

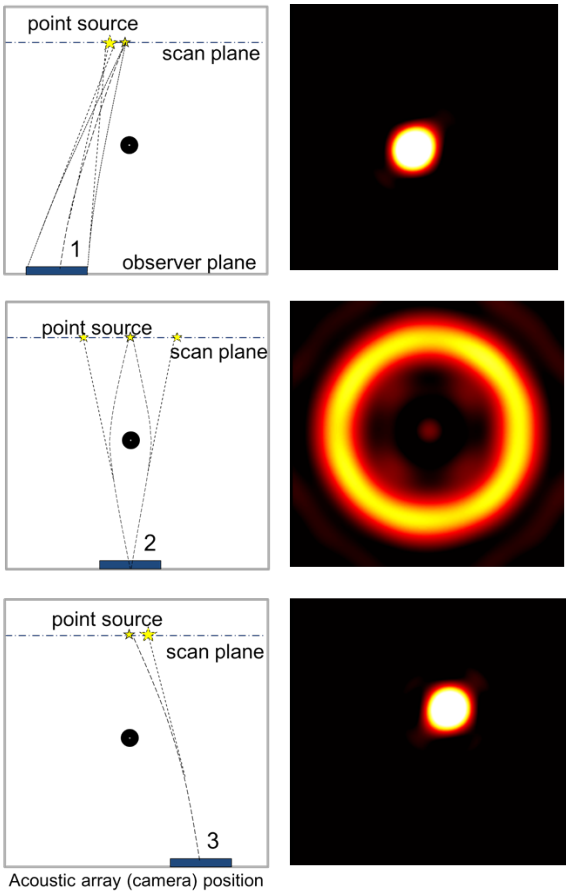

Abbildung 3: Skizze der Array-Position entlang einer Diagonalen in der Sampling-Ebene (links); Bilder der akustischen Kamera (rechts).

Literatur

[1] W.G. Unruh, Experimental Black-Hole Evaporation?, Phys. Review Letters, 46(21), 1981.

[2] M. Visser, Acoustic propagation in fluids: an unexpected example of Lorentzian geometry, gr-qc/9311028v1, 1993.

[3] M. Visser, Acoustic black holes: horizons, ergospheres, and Hawking radiation, Class. Quantum Grav. 15(6), 2000.

[4] T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie, Springer Spektrum; Auflage: 7. Aufl. 2016.

[5] H. Vogel, Gerthsen Physik, Springer, 1999.

[6] A. D. Pierce, Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow, J. Acoust. Soc. Am. 87(6), 1990.

[7] Möhring, Problems in flow acoustics, Rev. Mod. Phys., 55(3), 1983.

[8] Howe, Acoustics of Fluid-Structure Interactions, Cambridge, 1998.

[9] R. Ewert and W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. J. Comp. Phys. 188(3), 2003.