

# Alternative für Voigtsche Notation

O. Bschorr

Aeroakustik Stuttgart

## Zusammenfassung

Voigt verknüpft den Verformungs- und Spannungs-Zustand in einem anisotropen Festkörpers durch eine Tetrade. Diese hat als vierstufiger Tensor  $3^4 = 81$  freie Kennzahlen. Dagegen haben zweistufiger Spannungs- und Verformungs-Tensor nur je  $3^2 = 9$  Komponenten und selbst die allgemeinste 3D-Anisotropie – die triklinische Kristallklasse – ist bereits durch 6 wesentliche Material-Kennzahlen und durch 3 an sich unwichtige geometrische Orientierungswinkel festgelegt. Der ganz überwiegende Teil der 81 Kennzahlen sind unwesentliche Winkelwerte. Deshalb wird versucht, die Tetrade – hypothetisch - durch eine 3x3-Elastizitäts-Matrix zu ersetzen. Die nach dieser Vorstellung berechnete richtungsabhängige Slowness - die reziproke Wellengeschwindigkeit – eines anisotropen Festkörpers liegt auf einem Ellipsoid. Demgegenüber sind die nach Voigt berechneten Slowness-Gebilde sehr viel komplizierter; in den Hauptrichtungen aber kann Deckung hergestellt werden.

## Einleitung

Im Wettstreit um die Priorität des Elastizitätsgesetzes brachte Hooke 1675 das Anagramm *ceiinossttuv* und 3 Jahre später die Auflösung: *Ut tensio, sic vis*. Frei übersetzt: Verformung und Spannung sind proportional. Beim eindimensionalen Zugstab fungiert der skalare Elastizitätsmodul als Proportionalitätsfaktor. Beim dreidimensionalen, anisotropen Festkörper verbindet Voigt den 3x3-Verformungs-  $\mathbf{S}$  und den 3x3-Spannungs-Tensor  $\mathbf{T}$  durch eine Elastizitäts-Tetrade  $\mathbf{E}^{[4]} = \{E_{mnop}\}$  [Pa].

$$\mathbf{T} = \mathbf{E}^{[4]} \cdot \mathbf{S} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{T} = \{\sigma_{mn}\} = \{E_{mnop} S_{op}\} \quad (1)$$

Als vierstufiger 3D-Tensor hat  $\mathbf{E}^{[4]} = \{E_{mnop}\}$  insgesamt  $3^4 = 81$  Koeffizienten. Es gelang Voigt über die Kristall-Symmetrien die  $\mathbf{E}^{[4]}$ -Tetraden für die einzelnen Kristallklassen aufzustellen, qualitativ nicht aber quantitativ. Ein solcher Zugang ist bei technischen Aufgaben weniger geeignet. Außerdem hat Voigt dem Boltzmann-Theorem folgend nur den symmetrischen Verformungs-Tensor  $\mathbf{S}$  zugelassen und den antisymmetrischen Anteil a priori ausgeschlossen. Dafür musste er die stringente Tensor-Mathematik verlassen und ungelegene Extra-Regeln aufstellen. Eine kompakte Übersicht zur Voigtschen Theorie zeigt [1].

Der allgemeine zweistufige 3x3-Tensor besitzt insgesamt  $3^2 = 9$  unabhängige Komponenten. Bei den symmetrischen Tensoren  $\mathbf{S}$  und auch  $\mathbf{T}$  verringert sich die Zahl der relevanten Kennzahlen von 9 auf 6. Schließlich ergibt sich durch Ausrichtung auf die Tensor-Hauptachsen – durch eine Diagonalisierung - ohne Verlust an Allgemeinheit eine weitere Reduzierung von 6 auf 3 relevante Kennwerte. Weder bei den zweistufigen Dyaden noch bei der vierstufigen Tetrade macht Voigt von einer solchen Hauptachsen-Transformation Gebrauch. Tatsächlich ist die allgemeinste, linearelastische 3D-Anisotropie – die triklinische Kristallklasse – bereits durch 6 wesentliche Elastizitätskoeffizienten und durch 3 an sich unwesentliche geometrische Orientierungswinkel voll definiert. [2]

Aufgabe ist eine alternative Formulierung der Hookeschen Proportionalität. Dazu wird - hypothetisch - die vierstufige Voigtsche-Tetrade durch eine 3x3 Matrix  $\mathbf{E}$  mit insgesamt 9 unabhängigen Elastizitäts-Koeffizienten ersetzt. Zunächst wird auf symmetrische Spannungs-  $\mathbf{T}$  und Verzerrungs-Tensoren  $\mathbf{S}$  und Longitudinalwellen eingeschränkt. Gebrauch wird gemacht wird von der Eigenschaft, dass sich  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{T}$  je aus einem formtreuen Kugel-Tensor und einem volumen- und richtungstreuen Deviator zusammensetzen. Für die Elastizitäts-Matrix  $\mathbf{E}$  als nullstufiger Tensor gilt analog dasselbe. Im Besonderen werden via Hauptachsen-Transformation die von der Anisotropie eines Festkörpers bestimmten Haupt-Koordinaten eingeführt, Damit soll die richtungsabhängige Slowness berechnet und mit den Voigtschen Ergebnissen verglichen werden.

Zurückgestellt - nicht ausgeschlossen - wird der asymmetrische Tensor-Teil mit der transversalen Welle. Da symmetrisch/longitudinaler und antisymmetrisch/transversaler Teil orthogonal sind, ist eine getrennte Behandlung problemlos.

## Alternative für Voigtsche Notation

**Modellannahmen.** Wie bei Voigt wird ein homogener, verlustfreier anisotroper Festkörper in den zunächst beliebigen ortsfesten, kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x} = \{x_1\mathbf{x}_1, x_2\mathbf{x}_2, x_3\mathbf{x}_3\}$  zugrunde gelegt. Um Randeffekte auszuschließen sei dieser allseitig unbegrenzt, so dass keine Poissonsche Querkontraktion besteht;  $\nu = 0$ . Um die Vorteile der linearen Theorie mit Superposition und Orthogonalität nutzen zu können und um die diffizile Unterscheidung von Euler- und Lagrange-Beschreibung zu vermeiden, werden nur kleine – stringenter: infinitesimale - elastische Auslenkungen  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  [m]

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{x}_1 + s_2 \mathbf{x}_2 + s_3 \mathbf{x}_3 \quad (2)$$

und mit  $m, n = \{1, 2, 3\}$  und der Schreibweise  $s_{m,n} = \partial s_m / \partial x_n$  der für die lineare Verformung relevante, aus 9 unabhängigen Komponenten bestehende Tensor  $\nabla \mathbf{s}$  [-] zugelassen.

$$\nabla \mathbf{s} = \begin{matrix} s_{1,1} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 & s_{1,2} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & s_{1,3} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \\ s_{2,1} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1 & s_{2,2} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2 & s_{2,3} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ s_{3,1} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 & s_{3,2} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 & s_{3,3} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 \end{matrix} \quad (3)$$

Der Gradienten-Tensor  $\nabla \mathbf{s}$  lässt sich mit der Transponierten  $\nabla \mathbf{s}^T$  in einen symmetrischen  $(\nabla \mathbf{s})_{\text{sym}}$  und einen antisymmetrischen Teil  $(\nabla \mathbf{s})_{\text{asym}}$  trennen nach

$$\nabla \mathbf{s} = (\nabla \mathbf{s})_{\text{sym}} + (\nabla \mathbf{s})_{\text{asym}} \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{s}_{\text{sym}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T) \quad \nabla \mathbf{s}_{\text{asym}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} - \nabla \mathbf{s}^T) \quad (5)$$

Im Besonderen ist mit  $S_{mn} = S_{nm} = \frac{1}{2} (s_{m,n} + s_{n,m})$  die hier interessierende symmetrische Komponente  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \nabla \mathbf{s}_{\text{sym}} = \begin{matrix} S_{11} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 & S_{12} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & S_{13} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \\ S_{12} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1 & S_{22} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2 & S_{23} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ S_{13} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 & S_{23} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 & S_{33} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 \end{matrix} \quad (6)$$

**Elastizitäts-Tensor.** Der gewählten Hypothese gemäß wird die 3D-Anisotropie eines Festkörpers durch den aus 9 unabhängigen Kennzahlen  $E = \{E_{mn}\}$  [Pa] bestehenden Elastizitäts-Tensor  $\mathbf{E}$  [Pa] nachgebildet.  $m, n = \{1, 2, 3\}$

$$\mathbf{E} = \begin{matrix} E_{11} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 & E_{12} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & E_{13} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \\ E_{21} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1 & E_{22} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2 & E_{23} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ E_{31} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 & E_{32} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 & E_{33} \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 \end{matrix} \quad (7)$$

Der numerische Wert von  $E_{mn}$  [Pa] bestimmt sich nach Fig. 1a aus Kraft/Weg-Messungen an einer zB würfelförmigen, auf die Koordinaten-Achsen  $\mathbf{m}, \mathbf{n} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  ausgerichteten Materialprobe. Messgrößen sind die Verformungen  $s_{m,n} \mathbf{mn}$  [-] und die Spannungen  $\sigma_{mn} \mathbf{mn}$  [Pa] an einer Würfel­fläche mit der Flächen-Normalen  $\mathbf{m} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  und in der Kraft-Richtung  $\mathbf{n} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ . Die Kausalität verlangt, dass eine tensorielle  $s_{m,n} \mathbf{mn}$ -Verformung eine  $\sigma_{mn} \mathbf{mn}$ -Spannung bedingt, und umgekehrt. Das skalare Verhältnis von Spannung  $\sigma_{mn}$  und Dehnung  $s_{m,n}$  gibt den richtungs-spezifischen Elastizitätsmodul  $E_{mn}$

$$E_{mn} = \sigma_{mn} / s_{m,n} \quad s_{m,n} = \partial s_m / \partial x_n \quad (8)$$

Die Diagonalglieder  $E_{mm} = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$  erweisen sich als die Elastizitätsmodule in Richtung der Achsen  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  und  $\mathbf{x}_3$ . Bei den Seitengliedern  $E_{mn}$  mit  $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$  handelt es sich um die Schermodule einer Fläche mit der Normalen  $\mathbf{x}_m$  gegenüber einer Scherkraft in Richtung  $\mathbf{x}_n$

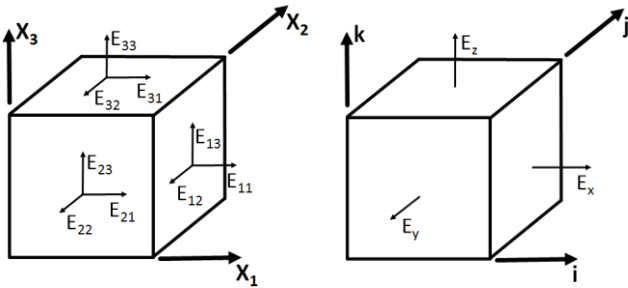


Fig. 1a. Würfelförmige Materialprobe, ausgerichtet auf die allg. kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x} = \{x_1\mathbf{x}_1, x_2\mathbf{x}_2, x_3\mathbf{x}_3\}$ . An der Würfel­fläche mit der Normalen  $\mathbf{m} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  und der Kraft­richtung  $\mathbf{n} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  besteht eine Druck- bzw. Scherspannung  $\sigma_{mn}$  und die dadurch verursachte Verformung  $s_{m,n} = \partial s_m / \partial x_n$ . Damit ergeben sich nach  $E_{mn} = \sigma_{mn} / s_{m,n}$  insgesamt 9 unabhängige, richtungs-spezifische Elastizitäts-Koeffizienten  $E_{mn}$ .

Fig. 1b. Bei Symmetrie reduziert sich die Zahl der Koeffizienten von 9 auf 6. Die Ausrichtung auf die Hauptrichtungen  $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_k\}$  des anisotropen Körpers bringt eine weitere Reduzierung auf die 3 Hauptwerte  $\{E_x, E_y, E_z\}$ .

Bei Beschränkung auf den symmetrischen 3x3-Tensor reduziert sich mit den 3 Symmetriebedingungen  $E_{12} = E_{21}$ ,  $E_{13} = E_{31}$  und  $E_{21} = E_{12}$  die Zahl der freien Kennzahlen von 9 auf 6. Im Weiteren kann ein symmetrischer Tensor über eine Hauptachsen-Transformation mit den raumfesten Haupt-Koordinaten  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_k$  ohne Verlust an Allgemeinheit auf Diagonalform gebracht werden. Dazu dient die im Anhang wiederholte Säkular-Gleichung [zB 1]

$$\det(\mathbf{E} - E\mathbf{I}) = 0 \quad E = \{E_x, E_y, E_z\} \quad (9)$$

mit den 3 Hauptwerten  $E_x, E_y, E_z$ . als Lösung mit Diagonal-Tensor  $\mathbf{E}$  und zugeordneter Matrix (nullstufiger Tensor)  $E$ :

$$\mathbf{E} = \begin{matrix} E_x \mathbf{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_y \mathbf{jj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_z \mathbf{kk} \end{matrix} \quad E = \begin{matrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{matrix} \quad (10,11)$$

Damit ist bei Symmetrie der allgemeine, anisotrope Festkörper bereits durch die 3 Hauptwerte  $E = \{E_x, E_y, E_z\}$  bestimmt und es besteht die Hookesche Proportionalität in Komponentenschreibweise

$$\sigma_{xx} = E_x s_{x,x} \quad \sigma_{yy} = E_y s_{y,y} \quad \sigma_{zz} = E_z s_{z,z} \quad (12)$$

Für die Tensor- bzw. Matrixschreibweise wird der heuristische Ansatz gewählt:  $\mathbf{mm} = \{\mathbf{ii}, \mathbf{jj}, \mathbf{kk}\}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \sigma_{mm} \mathbf{mm} = E_m s_{m,m} \mathbf{mm} \quad (13)$$

Dazu wird  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$  als Doppelskalar-Produkt von null- und zweistufiger Dyade aufgefasst. Oder, definiert man die Terme  $\sigma_{mm} \mathbf{mm}$  und  $s_{m,m} \mathbf{mm}$  formal als Matrix-Elemente, so stellt  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$  eine Hadamard-Multiplikation dar. Beide Sichtweisen erfüllen per se die Vorstellung, dass eine  $\mathbf{mn}$ -Ursache eine  $\mathbf{mn}$ -Wirkung hat.

Der Aufgabenstellung entsprechend sind die Tensoren  $\mathbf{V} = \{\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$  symmetrisch. Ein vollständiger symmetrischer Tensor besteht aus den beiden irreduziblen Komponenten, dem dilatorischen Kugeltensor  $\mathbf{V}_0$  und dem Deviator  $\mathbf{V}^*$ . ( $\mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} =$  Einheitstensor; Kugeltensor.)

$$\mathbf{V}_0 = \frac{1}{3} \mathbf{V}_{sym} \cdot \mathbf{U} \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{V}_{sym} - \mathbf{V}_0 \quad (14,15)$$

Mit der Eigenschaft, dass  $\mathbf{V}_0$  und  $\mathbf{V}^*$  orthogonal sind, also

$$\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{S}^* = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{S}_0 = 0 \quad (16)$$

lässt sich die Hookesche Proportionalität (13) auch getrennt nach den beiden Komponenten  $\mathbf{T}_0$  und  $\mathbf{T}^*$  angeben.

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{S}_0 \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{S}^* \quad (17,18)$$

Der Tensor  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{S}_0 = p \mathbf{U}$  lässt sich auf den omnidirektionalen Druck  $p$  [Pa] und der Tensor  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{s}$  auf die Divergenz des Verformungsfeldes  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  zurückführen. Mit  $E_0 =$  Kompressionsmodul  $K$  [Pa] bestätigt sich die bekannte Beziehung  $p = K \operatorname{div} \mathbf{s}$ .

**Wellengeschwindigkeit. Slowness.** Der in  $\mathbf{i}$ -Richtung wirkende Elastizitätsmodul  $E_x$  gibt zusammen mit der Dichte  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] die longitudinale Wellengeschwindigkeit  $c_x$ . Dasselbe gilt für die beiden anderen Hauptrichtungen  $c_y$  und  $c_z$ :

$$c_x = \sqrt{(E_x/\rho)} \quad c_y = \sqrt{(E_y/\rho)} \quad c_z = \sqrt{(E_z/\rho)} \quad (19)$$

In Richtung des Einheits-Vektors  $\mathbf{t}$  bestehen der Elastizitätsmodul  $E(\mathbf{t})$  und die richtungsabhängige Wellengeschwindigkeit  $c(\mathbf{t})$

$$E(\mathbf{t}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{tt} = E_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{t})^2 + E_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{t})^2 + E_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{t})^2 \quad (20)$$

$$c(\mathbf{t}) = \sqrt{(E(\mathbf{t})/\rho)} \quad (21)$$

Die Skalarprodukte  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}$  in (20) sind die bekannten Richtungskosinuse des Vektors  $\mathbf{t}$  gegenüber den ortsfesten Achsen  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  und erfüllen mit  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  die Identitäten

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{t} = \cos \alpha = x/r \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{t} = \cos \beta = y/r \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{t} = \cos \gamma = z/r \quad (22)$$

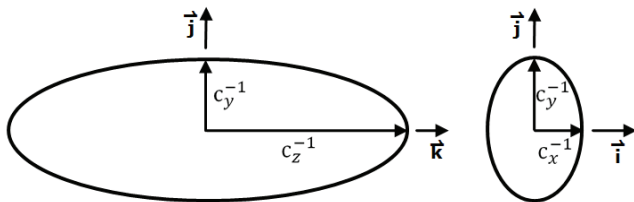
Damit schreibt sich die Wellengeschwindigkeit  $c = c(\mathbf{t})$  als Funktion der Koordinaten  $x, y, z$ .

$$c^2 = c_x^2 (x/r)^2 + c_y^2 (y/r)^2 + c_z^2 (z/r)^2 \quad (23)$$

Führt man anstelle der Wellengeschwindigkeiten  $c$  und  $c_{xyz}$  deren Reziprokwerte - die Slowness  $1/c = c^{-1}$  und  $1/c_{xyz} = c_{xyz}^{-1}$  - als Feldparameter ein, so wird

$$l \equiv (cr)^{-2} [(x/c_x^{-1})^2 + (y/c_y^{-1})^2 + (z/c_z^{-1})^2] \quad (24)$$

und man erkennt die bekannte Ellipsoid-Gleichung mit den 3 reziproken Hauptgeschwindigkeiten - den Slowness-Parametern  $c_x^{-1}, c_y^{-1}, c_z^{-1}$  als Ellipsoiden-Achsen. (Fig. 2)



**Fig. 2:** Slowness-Ellipsoid. In einem anisotropen Kontinuum liegt die von der Richtung abhängige reziproke Longitudinalwellengeschwindigkeit  $1/c$  - die slowness - auf einem Ellipsoid mit den 3 Hauptachsen  $1/c_x, 1/c_y$  und  $1/c_z$ . Entsprechend der Vereinbarung mit  $E_x \geq E_y \geq E_z$  ist  $1/c_z \geq 1/c_y \geq 1/c_x$ .

Demgegenüber sind die nach dem Voigt-Formalismus berechneten Slowness-Raumflächen sehr viel komplizierter. [4] In Richtung der Hauptachsen können beide Verfahren zur Deckung gebracht werden, nicht aber in den Zwischenbereichen. Insofern bietet sich eine Slowness-Vermessung als Experimentum crucis an.

### Anhang

**Säkular-Gleichung.** Der symmetrischen 3x3-Elastizitätstensor  $\mathbf{E}$  ist in den allgemeinen  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ -Koordinaten durch 6 Kennzahlen bestimmt. In den Koordinaten des Hauptsystems reduziert sich diese Zahl auf die 3 Hauptwerte  $E = \{E_x, E_y, E_z\}$ . Zu deren Bestimmung dient die klassische Säkular-Gleichung

$$\det(\mathbf{E} - E\mathbf{I}) = 0 \quad (26)$$

und führt auf die kubische Gleichung in  $E$

$$E^3 + I_1 E^2 + I_2 E + I_3 = 0 \quad (27)$$

mit den säkularen Tensor-Konstanten  $I_1, I_2$  und  $I_3$ .

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (28)$$

$$I_2 = E_{11}E_{22} + E_{22}E_{33} + E_{33}E_{11} - (E_{12})^2 - (E_{23})^2 - (E_{31})^2 \quad (29)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{E}_{mn})^2 \quad (30)$$

Die Summe  $I_1 = (E_{11} + E_{22} + E_{33})$  ist die Spur des  $\mathbf{E}$ -Tensors und bestimmt den Kugel-Tensor  $\mathbf{E}_0$ . ( $\mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} =$  Einheits-Tensor.)

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{3} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) \mathbf{U} = E_0 \mathbf{U} \quad (31)$$

Wird der  $\mathbf{E}_0$ -Teil abgetrennt, so verbleibt der symmetrische, spurfreie Deviator  $\mathbf{E}^*$

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 \quad (32)$$

$\mathbf{E}^*$  hat die verkürzte Säkular-Gleichung

$$E^{*3} + I_2 E^* + I_3 = 0 \quad (33)$$

aus der sich via casus irreducibilis die 3 Wurzelwerte  $E^* = \{E_x^*, E_y^*, E_z^*\}$  berechnen. Dem Vietaschen Wurzelsatz und der Spurfreiheit des Deviators entsprechend gilt

$$E_x^* + E_y^* + E_z^* = 0. \quad (34)$$

Die Lösungen der vollständigen Säkular-Gleichung sind:

$$E_x = E_x^* + E_0 \quad E_y = E_y^* + E_0 \quad E_z = E_z^* + E_0 \quad (35)$$

Schließlich werden diese Werte mit der Vereinbarung  $E_x \geq E_y \geq E_x$  den orthogonalen Hauptkoordinaten  $\mathbf{t}_{ijk} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  zugeordnet. Festzuhalten ist, dass allein die Anisotropie des Deviators die Hauptkoordinaten bestimmt.

**Alternative Säkular-Gleichung.** Anschaulicher und mathematisch einfacher programmierbar ist es, zuerst die Hauptrichtungen  $\mathbf{t}_{ijk} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  zu bestimmen. Bekanntlich haben die Hauptwerte eines Tensors  $\mathbf{E}$  die Eigenschaft, dass der Vektor  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$  wieder in Richtung des  $\mathbf{t}$ -Vektors zeigt und der Elastizitätswert  $E(\mathbf{t}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}\mathbf{t}$  in den Hauptrichtungen mit  $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_{ijk} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  ein Maximum/Minimum mit  $\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}\mathbf{t}) = 0$  hat. Dazu wird mit dem Einheitsvektors  $\mathbf{t}$  als Suchstrahl eine Halbkugel nach in den 3 Hauptrichtungen  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{ijk}$  liegenden Nullstellen abgetastet. Die diesen Richtungen  $\mathbf{t}_{ijk}$  zugeordneten 3 Hauptwerte  $E_{xyz}$  sind:

$$E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i \quad E_y = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_j \mathbf{t}_j \quad E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_k \mathbf{t}_k \quad (36)$$

**Longitudinaler/transversaler Deviator.** Zugrunde liegt ein homogener, isotroper Festkörper mit dem Schermodul  $G$  [Pa]. Der zugehörige Elastizitätstensor  $\mathbf{E}^*_{trans}$  ist symmetrisch und spurlos und stellt damit einen Deviator dar.

$$\mathbf{E}^*_{trans} = \begin{pmatrix} 0 & G_{ij} & G_{ik} \\ G_{ji} & 0 & G_{jk} \\ G_{ki} & G_{kj} & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Dieser hat nach (28) - (30) die Invarianten  $I_1, I_2$  und  $I_3$  und damit die - verkürzte - Säkular-Gleichung (39).

$$I_1 = 0 \quad I_2 = -2G^2 \quad I_3 = -3G^3 \quad (38)$$

$$E^{*3} - 2G^2 E^* - 3G^3 = 0 \quad (39)$$

Mit den - durch Einsetzen nachprüfaren - Lösungen

$$E_x = 2G \quad E_y = -G \quad E_z = -G \quad (40)$$

ergibt sich damit die Diagonalform

$$\mathbf{E}^*_{\text{long}} = \begin{pmatrix} 2G\mathbf{ii} & 0 & 0 \\ 0 & -G\mathbf{jj} & 0 \\ 0 & 0 & -G\mathbf{kk} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Da bei Isotropie alle Richtungen gleichwertig sind, gelten auch die Lösungen  $G(-\mathbf{ii} + 2\mathbf{jj} - \mathbf{kk})$  und  $G(-\mathbf{ii} - \mathbf{jj} + 2\mathbf{kk})$ . Die durch die Säkular-Gleichung verbundenen Deviatoren  $\mathbf{E}^*_{\text{trans}}$  und  $\mathbf{E}^*_{\text{long}}$  sind gleichwertig. Mit  $G$  als Schubmodul kann man  $\mathbf{E}^*_{\text{trans}}$  als den transversalen Teil eines isotropen Festkörpers deuten, in gleicher Weise ist  $\mathbf{E}^*_{\text{long}}$  der longitudinale Anteil mit dem Elastizitätsmodul  $E = 2G$ . Diese Beziehung bestätigt mit dem vorausgesetzten Ausschluss der Poissonschen Querkontraktion,  $\nu = 0$  den bekannten Zusammenhang  $G = \frac{1}{2} E(1+\nu)$ . [1. S.334]

Die **Kompatibilitäts-Bedingungen** gewährleisten, dass die Dichte in einem elastisch verformten Festkörper stetig bleibt und keine Diskontinuitäten auftreten. Schreibt man dazu den transversalen Deviator (37) in der Form (42) und berücksichtigt die Asymmetrie der Tensoren (43) so folgt Annihilation  $\mathbf{E}^*_{\text{trans}} \leftrightarrow \mathbf{0}$  und auch die Umkehrung.

$$\mathbf{E}^*_{\text{trans}} = [(\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) + (\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) + (\mathbf{ki} + \mathbf{ik})] G \quad (42)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} \quad (43)$$

**Zugstab.** Ein auf die Koordinate  $x$  ausgerichteter, homogener und isotroper Stab unterliege einer Spannung  $\sigma_{xx}$  [Pa] und hat bei einem Elastizitätsmodul  $E_v$  [Pa] die Verformung  $s_{x,x} = \sigma_{xx}/E_v$ . Bei einer Querkontraktion  $\nu$  sind die Querverformungen  $s_{y,y} = s_{z,z} = -\nu s_{x,x}$ . Damit besteht der Verformungstensor  $\mathbf{S}$  und hat die Komponenten  $\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}^* = \mathbf{S}$ .

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{ii} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\mathbf{jj} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\mathbf{kk} \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}^* = \frac{1}{3} s_{x,x} (1+\nu) \begin{pmatrix} 2\mathbf{ii} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{jj} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{kk} \end{pmatrix} \quad (44,45)$$

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{3} s_{x,x} (1-2\nu) \mathbf{U} \quad \mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} \quad (46)$$

Haben die Verformungen  $\mathbf{S}_0$  und  $\mathbf{S}^*$  die Elastizitäts-Module  $E_0$  und  $E^*$  so besteht die Spannungs-Gleichheit in  $x$ -Achse

$$\sigma_{xx} = E_v s_{x,x} = [E_0 \mathbf{S}_0 + E^* \mathbf{S}^*] \cdot \mathbf{ii} \quad (47)$$

Damit wird der zusammengesetzte Elastizitätsmodul  $E_v$  auf den Kompressionsmodul  $E_0 = K$  und den Deviationsmodul  $E^* = E_{\text{Dev}}$  zurückgeführt.

**Dilatation (Dil). Rotation (Rot). Deviation (Dev).** [6] Jeder vollständige  $3 \times 3$ -Tensor  $\mathbf{W}$  besteht nach  $\mathbf{W} = \Sigma \# \mathbf{W}_\#$  aus den 3 notwendigen und hinreichenden und wechselseitig orthogonalen Komponenten  $\# = \{\text{Dil}, \text{Rot}, \text{Dev}\}$ .

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{Dil}} + \mathbf{W}_{\text{Dev}} + \mathbf{W}_{\text{Rot}} \quad (48)$$

$$\mathbf{W}_{\text{Dil}} = \frac{1}{3} \mathbf{U} \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \quad \mathbf{W}_{\text{Rot}} = \mathbf{W}_{\text{asym}} = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} \mathbf{W} \quad (49,50)$$

$$\mathbf{W}_{\text{Dev}} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{Dil}} - \mathbf{W}_{\text{Rot}} = \mathbf{W}_{\text{sym}} - \mathbf{W}_{\text{Dil}} \quad (51)$$

Am Beispiel des Verformungstensors  $\mathbf{W} \rightarrow \nabla \mathbf{s}$  lassen sich die einzelnen  $\#$ -Komponenten veranschaulichen. ( $\mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} = \text{Einheits-Tensor}$ .)

$$\nabla \mathbf{s} = \nabla \mathbf{s}_{\text{Dil}} + \nabla \mathbf{s}_{\text{Rot}} + \nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}} \quad (52)$$

$$\nabla \mathbf{s}_{\text{Dil}} = \frac{1}{3} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{s} \quad (53)$$

$$\nabla \mathbf{s}_{\text{Rot}} = -\frac{1}{2} \mathbf{U} \times \operatorname{rot} \mathbf{s} = \nabla \mathbf{s}_{\text{asym}} \quad (54)$$

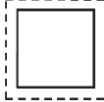

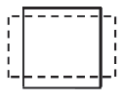
$$\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \operatorname{dev} \mathbf{s} = \nabla \mathbf{s}_{\text{sym}} - \nabla \mathbf{s}_{\text{Dil}} = \nabla \mathbf{s}_{\text{sym}} - \frac{1}{3} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{s} \quad (55)$$

**Dil:** Die form- und winkeltreue Dilatation  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Dil}}$ , geht auf den skalaren **div**-Operator zurück und ist als Kugel-Tensor durch 1 Kennzahl festgelegt. Eine **div s**-Störung breitet sich in einem elastischen Kontinuum als Longitudinalwelle aus.

**Rot:** Der volumen- und formtreue Rotations-Tensor  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Rot}} = \nabla \mathbf{s}_{\text{asym}}$  ist asymmetrisch und ist durch den vektoriellen **rot**-Operator bestimmt und hat 3 Bestimmungsgrößen. Wahlweise sind das die 3 Vektor-Komponenten oder der Betrag von **rot s** und 2 Winkelwerte zur räumlichen Festlegung der Vektor-Richtung. Eine **rot s**-Störung breitet sich als Transversalwelle aus.

**Dev:** Der volumen- und richtungstreue Deviator  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}}$  leitet sich von dem 5-komponentigen, dyadischen **dev**-Operator ab und entspricht einem Quadrupol. (Tab.1d-f) Eine **dev s**-Störung pflanzt sich als Oberflächenwellen fort.

Den in Tab.1b skizzierten Verformungsarten  $\#$  wird je ein Elastizitätsmodul  $E_\#$  und damit in linearer Näherung der Spannungstensor  $\mathbf{T}_\# = E_\# \nabla \mathbf{s}_\#$  [Pa] und die Volumenkraft  $\mathbf{f}_\# = \operatorname{div} \mathbf{T}_\#$  [N/m<sup>3</sup>] zugeordnet. (Tab. 1k,l,m)

a. Dilatation (Dil)	Rotation (Rot)	Deviation (Dev)
b. 		
c. Volumen-Änderung	Richtungs-Änd.	Gestalts-Änd.
d. Monopol	Dipol	Quadrupol
e. $\operatorname{div} \mathbf{s} = \text{Skalar}$	$\operatorname{rot} \mathbf{s} = \text{Vektor}$	$\operatorname{dev} \mathbf{s} = \text{Dyade}$
f. $s_{\text{Dil}} = \nabla \Phi$ für $\Delta \Phi \neq 0$	$\mathbf{s}_{\text{Rot}} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$	$\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla \Phi$ // $\Delta \Phi = 0$
g. $\operatorname{div} s_{\text{Dil}} = \operatorname{div} \mathbf{s}$	$\operatorname{rot} \mathbf{s}_{\text{Rot}} = \operatorname{rot} \mathbf{s}$	$\operatorname{dev} s_{\text{Dev}} = \operatorname{dev} \mathbf{s}$
h. $\operatorname{rot} s_{\text{Dil}} = \mathbf{0}$	$\operatorname{dev} \mathbf{s}_{\text{Rot}} = \mathbf{0}$	$\operatorname{div} s_{\text{Dev}} = \mathbf{0}$
i. $\operatorname{dev} s_{\text{Dil}} = \mathbf{0}$	$\operatorname{div} \mathbf{s}_{\text{Rot}} = \mathbf{0}$	$\operatorname{rot} s_{\text{Dev}} = \mathbf{0}$
k. $\nabla s_{\text{Dil}} = \frac{1}{3} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{s}$	$\nabla \mathbf{s}_{\text{Rot}} = -\frac{1}{2} \mathbf{U} \times \operatorname{rot} \mathbf{s}$	$\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \operatorname{dev} \mathbf{s}$
l. $\Delta s_{\text{Dil}} = \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s}$	$\Delta \mathbf{s}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s}$	$\Delta s_{\text{Dev}} = \Delta \nabla \Phi = \mathbf{0}$
m. $E_{\text{Dil}} = K$ [Pa]	$E_{\text{Rot}} = G$ [Pa]	$E_{\text{Dev}} = G$ [Pa]

Tab. 1. Reduktion des linearen elastischen Auslenkungsvektors  $\mathbf{s}$  und des  $3 \times 3$ -Tensors  $\nabla \mathbf{s}$  auf die 3 irreduziblen, wechselseitig orthogonalen Verformungen Dil, Rot, Dev.

### Literaturverzeichnis.

[1] H. Altenbach: Kontinuumsmechanik. 2. Auflage. Springer-Vieweg Verlag. Berlin. Heidelberg. 2012.  
 [2] E. Lohr: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. W. de Gruyter-Verlag. Berlin 1939.  
 [3] J. Betten: Tensorrechnung... Teubner-Verl. Stgt. (1987)  
 [4] D. Royer, E. Dieulesaint: Elastic Waves in Solids. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 2000.  
 [5-7] O. Bschorr: DAGA-Fortschritte Akustik.  
 [5] 2013. S 1262/3 [6] 2014. S. 80/1, [7] 2016. S. 270/1.