

# Akustische Rohrsysteme mit Abzweigungen, Verzweigungen und Kopplungen

K. Schnell, A. Lacroix

Institut für Angewandte Physik, Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Robert-Mayer-Straße 2-4, D-60325 Frankfurt am Main, email: Lacroix@iap.uni-frankfurt.de

## Einleitung

Die Lautproduktion der gesprochenen Sprache wird durch Anregung des Sprechtraktes realisiert. Der Sprechtrakt selbst ist ein Rohrsystem, welches durch geeignete zeitdiskrete Modelle beschrieben werden kann. Das zeitdiskrete Rohrmodell ist für die digitale Sprachverarbeitung von grundlegender Bedeutung und eine genaue Untersuchung seiner Möglichkeiten und Eigenschaften ist von großem Interesse. In diesem Beitrag wird neben Verzweigungen des Rohrsystems auf eine Ringstruktur des Rohrmodells eingegangen, welche sich nach einer Rohrverzweigung durch eine nachfolgende Kopplung ergibt. Es wird dabei auf eine geschlossene formelmäßige Herleitung der Übertragungsfunktion eingegangen, deren Ergebnis allgemein anwendbar ist.

## Rohrmodelle für ebene Wellenausbreitung

Das zeitdiskrete Rohrmodell beschreibt die Ausbreitung von ebenen Schallwellen durch ein Rohrsystem mit Querschnittssprüngen an äquidistanten Abständen, welches durch Kreuzgliedkettenfilter [1] realisiert wird. Die Querschnittssprünge werden durch Zweitordaptoren beschrieben, während die Rohrelemente mit konstantem Querschnitt durch Laufzeitglieder dargestellt sind, die sich oben oder unten im Signalflußpfad befinden können (vgl. Bild 1 unten). Für die Berechnung der Übertragungsfunktion sind die Betriebskettenmatrizen  $\mathbf{T}_i$  vorteilhaft, die die rechten Torgrößen mit den linken verknüpfen.  $\mathbf{T}_i$  enthält den  $i$ -ten Querschnittsprung mit  $R_i$  als Reflektionsfaktor und ein nachfolgendes Rohrelement, welches in der nachfolgenden Formel durch ein Laufzeitglied im unteren Signalflussspfad realisiert ist:

$$\mathbf{T}_i = K \cdot \begin{pmatrix} 1 & R_i z^{-1} \\ R_i & z^{-1} \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{pmatrix} x_i^f \\ x_i^b \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i \begin{pmatrix} x_{i+1}^f \\ x_{i+1}^b \end{pmatrix}$$

$x_i^f$  = Signal im oberen Signalflußpfad, am  $i$ -ten Rohrelement

$x_i^b$  = Signal im unteren Signalflußpfad.

$K$  ist von der Wellendarstellung abhängig, welche die Druck-, Fluß- oder Leistungswellen beinhalten kann. Verzweigungen bzw. Kopplungen werden durch Dreitor-Adaptoren beschrieben, welche als Streumatrizen dargestellt werden, die die Ausgangsgrößen  $b$  und  $d$  durch die Eingangsgrößen  $a$  und  $c$  verknüpfen. Die Druckwellendarstellung ist für die Streumatrizen gewählt worden und gilt für alle folgenden Formeln:

$$\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-1 & v & 2-u-v \\ u & v-1 & 2-u-v \\ u & v & 2-u-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1 & s & 2-r-s \\ r & s-1 & 2-r-s \\ r & s & 2-r-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{pmatrix}$$

$r, s, u$  und  $v$  sind die Parameter, aus denen sich die Flächenverhältnisse an den Dreitoren darstellen lassen. Die Streumatrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  stellen die Dreitor-Paralleladaptoren dar, an denen das Rohr verzweigt und wieder gekoppelt wird.

## Verzweigtes Rohrsystem

Die Übertragungsfunktion eines diskreten Rohrmodells mit Verzweigungen kann dadurch ermittelt werden, indem der Dreitoradaptor mit einem Rohrabzweig, welcher keinen Systemein-

und Ausgang besitzt, durch eine  $2 \times 2$  Betriebskettenmatrix dargestellt wird. So können sukzessiv alle Verzweigungen in einem Rohrmodell abgearbeitet werden, um die Übertragungsfunktion zu berechnen, wie in [2] dargestellt. Um eine einfache Herleitung der Übertragungsfunktion von Rohrmodellen zu ermöglichen, die Ringstrukturen aufweisen, d.h. Verzweigungen mit anschließenden Kopplungen, wurde nach einer allgemeinen Formel gesucht, die ein entsprechendes Teilrohrsystem mit einer Ringstruktur durch eine  $2 \times 2$  Betriebskettenmatrix darstellen kann (Bild 1).

## Ringstruktur

Durch eine Verzweigung, dargestellt durch die Streumatrix  $\mathbf{B}$ , und eine nachfolgende Kopplung, mit der Streumatrix  $\mathbf{C}$  entsteht eine Ringstruktur. Die Zweige zwischen den beiden Dreitor-Adaptoren werden durch die Betriebskettenmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  verknüpft

$$\begin{pmatrix} a2 \\ b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d2 \\ c2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a3 \\ b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H11 & H12 \\ H21 & H22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d1 \\ c1 \end{pmatrix},$$

wie in Bild 1 zu sehen ist. Durch die Streumatrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  sowie die Betriebskettenmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  erhält man insgesamt 10 Gleichungen. Um die resultierende Betriebsketten-Matrix von dem gesamten Ring zu erhalten, müssen die 8 inneren Signale ( $a_2, d_2$  etc.) eliminiert werden. Wegen der großen Anzahl der auftretenden Terme, wird dies mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems durchgeführt. Es ergeben sich hierbei Formeln für die Matrixelemente der resultierenden Betriebskettenmatrix  $\mathbf{T}_g$  der Ringstruktur:

$$\mathbf{T}_g = \frac{1}{T_n} \begin{pmatrix} T_{z11} & T_{z12} \\ T_{z21} & T_{z22} \end{pmatrix}.$$

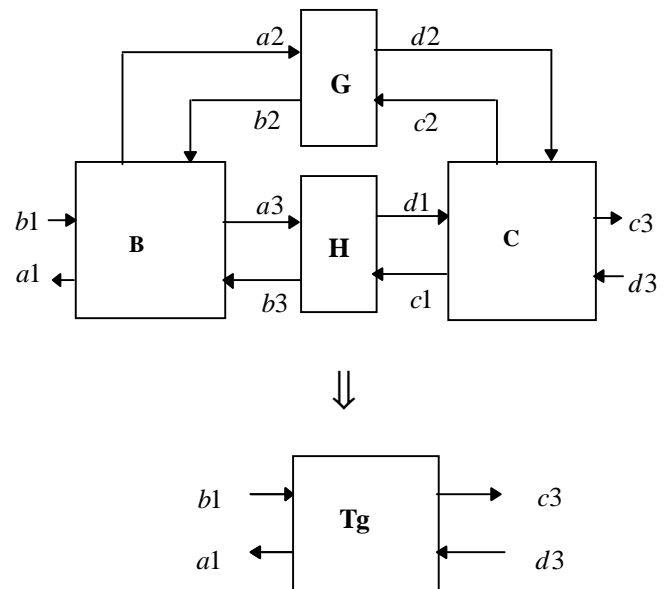


Bild 1: Komplette Ringstruktur, reduziert auf die Betriebskettenmatrix  $\mathbf{T}_g$

## Unsymmetrische Ringstruktur

Die vier Matrixelemente von  $\mathbf{T}_g$  sind rational mit identischem Nennerpolynom:

$$T_n = u(r(G11 - G22 + G21 - G12) + s(H11 - H22 + H21 - H12)).$$

Die Polynome  $T_{z11}$  und  $T_{z12}$  beschreiben die Zählerpolynome der oberen Matrixelemente von  $\mathbf{T}_g$  :

$$T_{z11} = (H11 - rvG22 + (r-1)H12 + (u-1+v)H21 + (ru-r+u+1-v+rv)H22)G11 + (rvG21 + (s-1)H11 + (1-r-s)H12 + (1+us-v-u+vs-s)H21 + (s+v+r-us+u-ru-vs-1-rv)H22)G12 + ((1-v)H11 + (r+v-1-rv)H12 + (u-1)H21 + (ru-u+1-r)H22)G21 + ((s-1-vs+v)H11 + (rv-r+1-s-v+vs)H12 + (us-s+1-u)H21 + (r-us-1+s+u-ru)H22)G22 + (vs-2s+us)H22H11 + (2s-us-vs)H21H12$$

$$T_{z12} = (-rvG22 + (s-1+r)H11 + (1-s)H12 + (1-r-v-u+vs+rv-s+us+ru)H21 + (s-1-vs+v+u-us)H22)G11 + (rvG21 + (1-r)H11 - H12 + (v-1+u+r-ru-rv)H21 + (1-u-v)H22)G12 + ((s-1-rv+r-vs+v)H11 + (vs-v-s+1)H12 + (us-s+ru-u+1-r)H21 + (s-1-us+u)H22)G21 + ((1-v-r+rv)H11 + (v-1)H12 + (r-1-ru+u)H21 + (1-u)H22)G22 + (vs-2s+us)H22H11 + (2s-us-vs)H21H12$$

Die restlichen beiden Elemente der Matrix  $\mathbf{T}_g$  sind abhängig von diesen. Die Hauptdiagonalelemente sind miteinander verknüpft ebenso wie die Nebendiagonalelemente; beispielsweise kann aus  $T_{z12}$  das Element  $T_{z21}$  berechnet werden. Dazu müssen die Indizes von  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  systematisch verändert werden:

$$11: = 22, 22: = 11, 12: = 21, 21: = 12.$$

Zusätzlich müssen noch alle Vorzeichen der skalaren Vorfaktoren  $r, s, u, v$  und Konstanten umgekehrt werden. Dadurch sind die unteren Matrixelemente  $T_{z21}$  und  $T_{z22}$  bestimmt. Bei der Realisierung einer Ringstruktur sind die Vorfaktoren der Betriebskettenmatrizen in  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  zu beachten. Deshalb wurde in dem folgenden Beispiel eine gerade Anzahl von Rohrelementen von  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  verwendet, in denen die Zustandsspeicher sich abwechselnd im oberen und unteren Signalflußpfad der Kreuzglied-Elemente befinden. Weiterhin ist zu beachten, daß die Reflektionsfaktoren in der Ringstruktur Flächen erzeugen, die den Ring physikalisch konsistent schließen.

### Symmetrische Ringstruktur

Sind die beiden Zweige  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  identisch, so vereinfachen sich die Elemente in  $\mathbf{T}_g$ . In diesem Fall erniedrigt sich der Systemgrad, da der Nenner  $T_n$  sich mit den Zählerpolynomen in  $\mathbf{T}_g$  kürzt, so daß vom Nenner nur noch ein Konstante übrigbleibt. Dies hat zur Folge, daß für unverzweigte Rohrabschnitte  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  die Ringstruktur der Systemfunktion keine Nullstellen hinzufügt. Für  $\mathbf{G} = \mathbf{H}$  liegen die Polstellen der Matrixelemente von  $\mathbf{T}_g$  genau an Positionen, an denen schon Nullstellen liegen, so daß diese Paare sich gegenseitig aufheben. Wird die Symmetrie gebrochen, das heißt für  $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$ , so entstehen neue Pol-Nullen Paare. Dies wird am folgendem Beispiel verdeutlicht.

### Brechung der Symmetrie einer Ringstruktur

Die Bilder 2-4 zeigen Auswirkungen eines Übergangs von einer symmetrischen Ringstruktur ( $\mathbf{G} = \mathbf{H}$ ) zu einer unsymmetrischen Ringstruktur ( $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$ ).  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  enthalten jeweils vier Rohrelemente ohne weitere Verzweigungen. Der Systemeingang befindet sich links vor der Ringstruktur und der Systemausgang dahinter (siehe Bild 1 oben). Links und rechts der Ringstruktur existieren keine weiteren Querschnittsprünge oder Abschlüsse, so daß das Übertragungsverhalten nur von  $T_{z11}$  und  $T_n$  abhängt. In Bild 2 sind vier Betragsspektren gezeigt, welche einen linearen Übergang aufweisen zwischen einem symmetrischen und

unsymmetrischen Fall. Die Entwicklung der Aufspaltung eines Pol-Nullstellen-Paares ist deutlich zu erkennen.

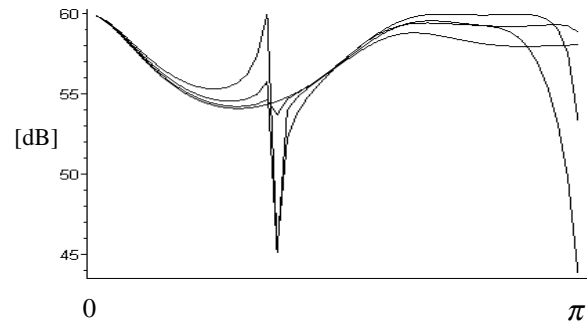


Bild 2: Betragsgang des Überganges von einer symmetrischen Ringstruktur zu einer unsymmetrischen Ringstruktur.

Die Pol-Nullstellen Konfiguration des ersten symmetrischen Falles und des vierten unsymmetrischen Falles aus Bild 2 ist in den Bildern 3 und 4 dargestellt. In Bild 3 ist zu erkennen wie die insgesamt vier Nullstellen mit den entsprechenden Polstellen koinzidieren, im Gegensatz zu der Situation in Bild 4.

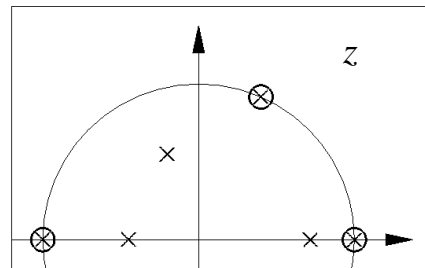


Bild 3: Symmetrische Ringstruktur

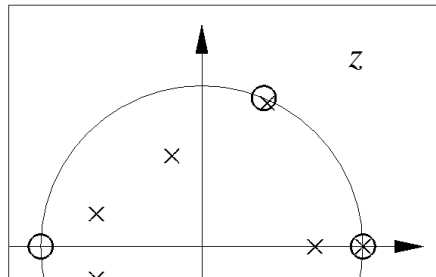


Bild 4: Unsymmetrische Ringstruktur

### Zusammenfassung

Für akustische Rohrmodelle wurden Ringstrukturen untersucht, welche sich durch eine Verzweigung mit anschließender Kopplung auszeichnen. Es konnte eine allgemeingültige Herleitung der Übertragungsfunktion in geschlossenen Formeln gefunden werden. Dadurch können die Eigenschaften derartiger Ringstrukturen allgemein untersucht werden.

### Literatur

- [1]: Lacroix, A: Digitale Filter, R. Oldenbourg Verlag, München, 4. Auflage, 1996.
- [2]: Schnell, K. & Lacroix, A: Parameterbestimmung für erweiterte Rohrmodelle zur Sprachsynthese, Tagungsband DAGA 1998, pp 541-542.