

Zur Quantifizierung statistischer Fehler des Betrages FFT-basierter Kreuzleistungsdichteschätzer

M. Blau, TU Dresden, Institut f. Akustik u. Sprachkommunikation

1 Einführung

Messungen in der Akustik können grob in zwei Kategorien eingeteilt werden: zum einen die Messung der Übertragungseigenschaften akustischer bzw. akustomechanischer oder elektroakustischer Systeme, zum anderen die Messung von Geräuschen oder Schwingungen im Betriebszustand. Während man im ersten Fall die Systemanregung selbst bestimmen und damit geeignete Testsignale verwenden kann, ist dies im zweiten Fall nicht möglich. Hier muß man Modellannahmen zur Erzeugung der interessierenden Geräusche / Schwingungen machen.

Da reale Schallquellen oft nichts von unserer Vorliebe für deterministische Signale wissen, werden im allgemeinen statistische Modelle zugrundegelegt, bei denen nicht Zeitverläufe z.B. des Schalldruckes interessieren, sondern Leistungsgrößen oder daraus abgeleitete Größen wie zeitbewertete Schalldruckpegel. Interessiert man sich für die spektrale Struktur eines solchen Geräusches, so kommt neben der altbewährten Filteranalyse immer mehr die FFT-basierte Analyse zur Anwendung.

Dabei stellt man sich innerhalb des Analysezeitraums das Geräusch als bandbegrenzten stationären Zufallsprozeß vor, dessen Leistungsdichte es zu bestimmen gilt. Der Unterschied zur Modellierung als periodisches Signal, dessen Leistung man ermittelt (welcher im schönen Begriff Powerspektrum verwischt wird), besteht darin, daß es in folgenden Analyseperioden *keine* exakte Wiederholung des Signalverlaufs gibt. Dies hat wichtige Konsequenzen für Techniken zur Rauschunterdrückung und für auftretende Meßfehler.

Aus der statistischen Natur der zugrundegelegten Zufallsprozesse ergibt sich, daß FFT-basierte Leistungsdichteschätzer für jede betrachtete Frequenz zufälligen Schwankungen unterliegen. Diese zufälligen Schwankungen kann man vermindern, indem die Anzahl der Mittelungen bei der FFT-Analyse erhöht wird. Man kann sie jedoch nicht vollständig vermeiden (dazu müßte man unendlich lange mitteln). Mit anderen Worten: jede Leistungsdichtemessung ist mit statistischen Fehlern behaftet.

Beschränkt man sich nicht nur auf einkanalige Messungen, so interessiert man sich möglicherweise für die Leistung der in jeweils zwei Geräuschen enthaltenen gleichen Signalanteile, die durch den Betrag der Kreuzleistungsdichte gegeben ist. Logischerweise unterliegt auch der Betrag FFT-basierter Kreuzleistungsdichteschätzer zufälligen Schwankungen, die allerdings nicht nur von der Anzahl der Mittelungen, sondern auch von der Kohärenz zwischen beiden Signalen abhängen. Die Quantifizierung der dadurch bewirkten Fehler ist Gegenstand des vorliegenden Beitrags.

2 Stand der Technik

Das Phänomen zufälliger Fehler bei der FFT-basierten Schätzung von Leistungsdichten ist seit der Einführung der FFT für diese Zwecke bekannt [1]. Die heute im allgemeinen angegebene Näherungsformel für die relative Standardabweichung des Betrages FFT-basierter Kreuzleistungsdichtefehler lautet

$$\varepsilon_r(\omega) = \frac{\sqrt{\text{Var}\{|\hat{S}_{xy}(\omega)|\}}}{|S_{xy}(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{n_d \gamma_{xy}^2(\omega)}}, \quad (1)$$

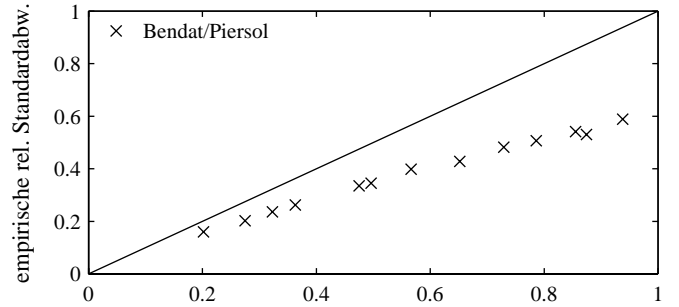


Abb. 1. Simulationsbeispiel: Vorhersage der relativen Standardabweichung für Beträge von Kreuzleistungsdichteschätzern mit Gl. 1. Simulationsparameter: normalverteilte Zufallssequenzen verschiedener Kohärenzen; jeweils 8192-Punkte FFT, $n_d = 100$, Hanning-Fenster, $N=3277$ Frequenzpunkte.

siehe z.B. [2]. In Gl. 1 bedeuten $S_{xy}(\omega)$ die wahre Kreuzleistungsdichte, $\hat{S}_{xy}(\omega)$ ihr Schätzer, $\gamma_{xy}^2(\omega)$ die gewöhnliche Kohärenz, n_d die Anzahl der zur Schätzung herangezogenen disjunkten Zeitabschnitte (Anzahl der Mittelungen) und ω die auf die Abtastrate normierte Kreisfrequenz. Diese Formel geht auf Arbeiten von BENDAT und PIERSOL aus den 70er Jahren zurück (siehe [3] für eine aktuelle Auflage). Sie beruht auf der Annahme, daß die zugrundegelegten stationären Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$ jeweils mit dem Erwartungswert Null normalverteilt sind und daß das Analysezeitfenster ausreichend groß ist. Außerdem gilt sie nur hinreichend weit weg von den Frequenzgrenzen des Analysierbereiches ($0 \ll |\omega| \ll \pi$).

Vergleicht man die mit der Näherungsformel aus Gl. 1 vorhergesagte relative Standardabweichung des Betrages von Kreuzleistungsdichteschätzern mit in Simulationsrechnungen gewonnenen empirischen Standardabweichungen, so stellt man fest, daß die Vorhersagen stets höher liegen als die Beobachtungen, siehe Abb. 1. Die Diskrepanz ist umso höher, je höhere Standardabweichungen vorhergesagt werden, d.h., da in den Simulationen die Anzahl der Mittelungen konstant war, je niedriger die Kohärenz ist. Wie ist dieses Verhalten zu erklären?

Verfolgt man die Herleitung von BENDAT und PIERSOL [3], so enthält sie den der Übergang von

$$\text{Var}\{|\hat{P}_{xy}(\omega)|\} = E\{|\hat{P}_{xy}(\omega)|^2\} - E^2\{|\hat{P}_{xy}(\omega)|\} \quad (2)$$

zu

$$\text{Var}\{|\hat{P}_{xy}(\omega)|\} = S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega). \quad (3)$$

Hier wird zunächst der Einfluß der Mittelungen nicht betrachtet, d.h. es werden Vorhersagen zu Periodogrammen $\hat{P}_{xy}(\omega)$ gemacht. Da unter den getroffenen Annahmen (normalverteilte stationäre Zufallsprozesse mit Erwartungswert Null, vernachlässigbarer Einfluß der Zeitfensterung und $0 \ll |\omega| \ll \pi$)

$$E\{|\hat{P}_{xy}(\omega)|^2\} = S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega) + |S_{xy}(\omega)|^2 \quad (4)$$

gilt [3], wurde offensichtlich

$$E\{|\hat{P}_{xy}(\omega)|\} = |S_{xy}(\omega)| \quad (5)$$

gesetzt, d.h. es wurde davon ausgegangen, daß der Betrag der Kreuzleistungsdichte ohne systematische Fehler geschätzt wird.

Tatsache ist dagegen, daß unter den oben genannten Voraussetzungen nicht der Betrag, sondern Real- und Imaginärteil der Kreuzleistungsdichte ohne systematischen Fehler geschätzt werden,

$$E \{ \hat{P}_{xy}(\omega) \} = S_{xy}(\omega) \quad (6)$$

[4]. Aus der Dreiecksungleichung

$$E \{ |\hat{P}_{xy}(\omega)| \} \geq |E \{ \hat{P}_{xy}(\omega) \}| \quad (7)$$

ergibt sich somit

$$E \{ |\hat{P}_{xy}(\omega)| \} \geq |S_{xy}(\omega)| \quad (8)$$

anstelle von Gl. 5. Der Betrag der Kreuzleistungsdichte wird durch das entsprechende Periodogramm also tendenziell überschätzt. Daraus folgt zwangsläufig, daß die tatsächliche Varianz kleiner werden kann als in Gl. 3 angegeben, womit die in Abb. 1 beobachtete Diskrepanz zwischen Vorhersage und Beobachtung zumindest qualitativ erklärt ist.

3 Ein Schätzer für den Erwartungswert des Fehlerquadrats

Da sich aus der vorhergehenden Diskussion ergibt, daß systematische Fehler nicht vernachlässigt werden können, stellt sich die Frage nach einer separaten Charakterisierung systematischer und zufälliger Fehler. Eine solche Separierung soll hier jedoch nicht betrieben werden. Stattdessen interessieren wir uns für den Erwartungswert des gesamten Fehlerquadrats,

$$E \left\{ \left(\Delta |S_{xy}(\omega)| \right)^2 \right\} = E \left\{ \left(|\hat{P}_{xy}(\omega)| - |S_{xy}(\omega)| \right)^2 \right\}. \quad (9)$$

Zur Abschätzung dieser Größe kann ein "klassisches" Vorgehen über das totale Differential benutzt werden. Damit kann man den Erwartungswert des Fehlerquadrats des Betrages näherungsweise auf Varianzen und Kovarianzen von Real- und Imaginärteil der Periodogramme zurückführen,

$$\begin{aligned} E \left\{ \left(\Delta |S_{xy}(\omega)| \right)^2 \right\} &\approx E \left\{ \left(\frac{\partial |S_{xy}(\omega)|}{\partial \operatorname{Re} S_{xy}(\omega)} \Delta \operatorname{Re} S_{xy}(\omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial |S_{xy}(\omega)|}{\partial \operatorname{Im} S_{xy}(\omega)} \Delta \operatorname{Im} S_{xy}(\omega) \right)^2 \right\} \\ &= f \left(\operatorname{Var} \{ \operatorname{Re} \hat{P}_{xy}(\omega) \}, \operatorname{Var} \{ \operatorname{Im} \hat{P}_{xy}(\omega) \}, \right. \\ &\quad \left. \operatorname{Cov} \{ \operatorname{Re} \hat{P}_{xy}(\omega), \operatorname{Im} \hat{P}_{xy}(\omega) \} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Die Funktion f ergibt sich über partielle Differentiation von

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 S_{xy}(\omega) + \operatorname{Im}^2 S_{xy}(\omega)}, \quad (11)$$

Formeln für die benötigten Varianzen und Kovarianzen finden sich im Anhang von [4]. Vernachlässigt man schließlich, wie bei BENDAT und PIERSOL, den Einfluß der Zeitfensterung, ergibt sich nach mehreren unkomplizierten Umformungen

$$E \left\{ \left(\Delta |S_{xy}(\omega)| \right)^2 \right\} \approx \frac{1 + \gamma_{xy}^2(\omega)}{2 n_d \gamma_{xy}^2(\omega)} |S_{xy}(\omega)|^2. \quad (12)$$

Hier wurde wieder der Einfluß der Mittelung über n_d Periodogramme berücksichtigt: auch wenn die Division durch n_d strenggenommen nur bei statistisch unabhängigen Fehlerquadraten der

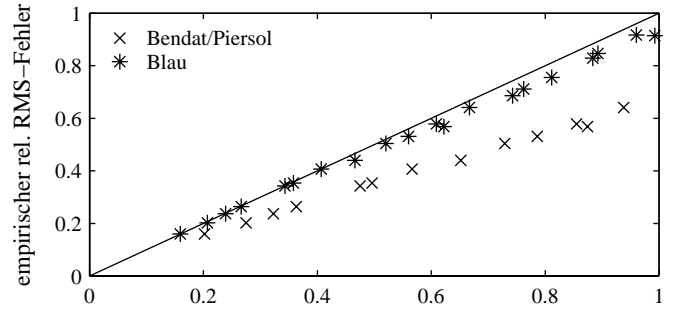


Abb. 2. Simulationsbeispiel: Vorhersage des relativen RMS-Fehlers für Beträge von Kreuzleistungsdichteschätzern mit Gl. 1 bzw. der Wurzel aus Gl. 12. Simulationsparameter: normalverteilte Zufallssequenzen verschiedener Kohärenzen; jeweils 8192-Punkte FFT, $n_d = 100$, Hanning-Fenster, $N=3277$ Frequenzpunkte.

einzelnen Periodogramme zulässig ist (was aufgrund der systematischen Fehler nicht der Fall ist), so stellt sie doch eine gute Näherung dar, da gezeigt werden kann, daß auch die systematischen Fehler mit zunehmender Anzahl von Mittelungen kleiner werden. Man sieht, daß die Formel aus Gl. 12 der von BENDAT und PIERSOL, multipliziert mit $(1 + \gamma_{xy}^2(\omega))/2$, entspricht.

Vergleicht man die mit dieser Formel gemachten Vorhersagen mit Beobachtungen bei Simulationsrechnungen, so ist eine recht gute Übereinstimmung zu konstatieren, siehe Abb. 2. Dagegen überschätzt man mit der Formel von BENDAT und PIERSOL auch den Erwartungswert des Fehlerquadrates bzw. seine Quadratwurzel (auch das kann formal gezeigt werden, analog zur Argumentation in Abschnitt 2).

4 Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wurde gezeigt, daß die heute allgemein anerkannte Näherungsformel zur Vorhersage der relativen Standardabweichung des Betrages FFT-basierter Kreuzleistungsdichteschätzer die tatsächlich auftretenden statistischen Fehler meist überschätzt, und zwar umso mehr, je niedriger die Kohärenz ist. Der Grund hierfür besteht darin, daß bei dieser Formel davon ausgegangen wurde, daß der Betrag der Kreuzleistungsdichte ohne systematischen Fehler geschätzt wird. Dies steht jedoch, zumindest in dieser Absolutheit, im Widerspruch mit den Voraussetzungen, unter denen besagte Formel hergeleitet wurde.

Als Alternative wird eine Näherungsformel für den Erwartungswert des Fehlerquadrats vorgeschlagen. Diese Formel beruht auf denselben Voraussetzungen (normalverteilte stationäre Zufallsprozesse mit Erwartungswert Null, vernachlässigbarer Einfluß der Zeitfensterung und $0 \ll |\omega| \ll \pi$) und kommt mit denselben Informationen aus (Kohärenz, Anzahl der Mittelungen), sagt jedoch niedrigere Fehler immer dann vorher, wenn die Kohärenz kleiner als eins ist. In Simulationsrechnungen konnte gezeigt werden, daß diese niedrigeren Vorhersagen wesentlich besser mit Beobachtungen übereinstimmen.

Literatur

- [1] P. D. Welch. The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-15(June):70-73, 1967.
- [2] R. B. Randall. *Frequency analysis*. Brüel & Kjær, 3. Auflage, 1987.
- [3] J. S. Bendat und A. G. Piersol. *Random data: Analysis and measurement procedures*. Wiley-Interscience, 2. Auflage, 1986.
- [4] M. Blau. *Zur Fehlerproblematik bei der inversen Messung von Erregerkraftspektren in der Vibroakustik*. Der Andere Verlag, 1999.