

Dynamik akustischer Blasenfelder

STEFAN LUTHER, ROBERT METTIN und WERNER LAUTERBORN
Drittes Physikalisches Institut, Universität Göttingen
Bürgerstr. 42-44, 37073 Göttingen

Die Hamiltonsche Formulierung inkompressibler Hydrodynamik hat sich als erfolgreicher Ansatz zur Modellierung von Kavitationsblasenfeldern erwiesen. Wir beschreiben die Dynamik von N akustisch getriebenen, masselosen und sphärischen Blasen in einer viskosen Potentialströmung bei hohen Reynolds- und niedrigen Weberzahlen. Schwerpunkt der Untersuchung ist die Charakterisierung der hydro-akustischen Paarwechselwirkung der Blasen und ihre Relevanz für die Entstehung und Stabilität kollektiver makroskopischer Strukturen.

Akustische Kavitationsblasenfelder sind komplexe Mehrskalen- und Mehrphasen-Systeme, die Phänomene raum-zeitlicher Strukturbildung zeigen. Bereits eine einzelne Blase kann eine außerordentlich komplexe Schwingungsdynamik aufweisen. Die Wechselwirkung einer Vielzahl solcher nichtlinearer Oszillatoren miteinander und mit dem äußeren Schallfeld kann zur Entstehung von Strukturen führen, die eine räumliche Ausdehnung von bis zu 10^3 Blasenruheradien besitzen und auf 10^4 Perioden der äußeren Anregung zeitlich stationär sind [1]. Beobachtet werden insbesondere filamentartige, dendritische Strukturen (Abb. 1), die für einen kritischen Wert eines Kontrollparameters eine Transition zu Clustern von 10-20 Blasen zeigen (Abb. 2). Auch diese gebundenen und über hunderte von Perioden stabilen Zustände weisen ein hohes Maß an Komplexität in der Blasenbewegung auf. Zur Modellierung akustischer Blasenfelder wurden Kontinuumsmodelle vorgeschlagen, die ihr Augenmerk auf die Eigenschaften gemittelter, makroskopischer Größen legen. Naturgemäß führt dieser Mittelungsprozess zu einem Verlust von Information auf mikroskopischen Skalen. Wir verfolgen daher den Ansatz der Hamiltonschen bzw. Lagrangeschen Formulierung der inkompressiblen Hydrodynamik [2-4]. Betont werden muß jedoch, daß die direkte Wechselwirkung der Blasen durch Kollision oder Fragmentierung auch im Rahmen dieser Theorie nicht beschrieben werden kann; dies bleibt der direkten numerischen Simulation (DNS) vorbehalten. Der Kern der Fragestellung ist daher das Verständnis der elementaren Dynamik von Translation und Oszillation einer Einzelblase auf mikroskopischer Skala und die Bedeutung der Blasenwechselwirkung für das Entstehen und die Stabilität von Strukturen auf makroskopischen Raum- und Zeitskalen.

Wir betrachten hierzu ein System von N masselosen, sphärischen Blasen, deren Zustand im Phasenraum bestimmt sei durch ihre Positionen \vec{x}_i , die Translationsgeschwindigkeiten \vec{u}_i , sowie die Blasenradien R_i und die Radialgeschwindigkeiten \dot{R}_i . Da die Blasen masselos sind, ist die kinetische Energie \mathcal{T} des Systems vollständig durch die kinetische Energie des Fluids gegeben. Die potentielle Energie \mathcal{V} hingegen ist, da die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen wird, allein

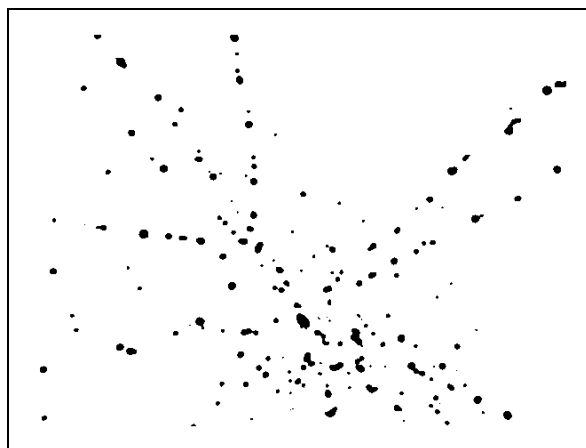


Abb.1: Segmentierte CCD-Aufnahme eines akustischen Kavitationsblasenfeldes (Bildausschnitt $8 \times 6 \text{ mm}^2$, $Re \approx 100$). Deutlich erkennbar ist die Anordnung der sich ins Bildzentrum bewegend Blasen auf filamentartigen Strukturen.

durch die potentielle Energie des Gases in den Blasen gegeben. Die Lagrange-Gleichungen des Systems können dann in der üblichen Form aus der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ mit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = F_i^{\text{ex}} + F_i^\eta + F_i^b + F_i^g \quad (1)$$

bestimmt werden [5]. Auf der linken Seite der Gl. (1) finden sich Kräfte, welche aus einem Potential abgeleitet werden können; für die Kräfte auf der rechten Seite ist dies nicht möglich. Zu ihnen zählen viskose Reibung, äußere Anregung, Auftrieb und primäre Bjerknes-Kraft. Für die radialen Blasenoszillationen folgt aus Gl. (1) ein System modifizierter Rayleigh-Plesset-Gleichungen in der Form

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3}{2} \dot{R}_i^2 - \frac{1}{4} \vec{u}_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{R_j (\ddot{R}_j R_j + 2 \dot{R}_j^2)}{|\vec{r}_{ij}|} + \mathcal{O}(|\vec{r}_{ij}|^{-2}) = \frac{1}{\rho} (P(R_i) - P_0) + \frac{F_i^\eta + F_i^{\text{ex}}}{4\pi\rho R_i^2}, \quad (2)$$

wobei $\vec{r}_{ij} = \vec{x}_i - \vec{x}_j$ ist und $m_i = 4\pi\rho\dot{R}_i R_i^2$ sowie $\vec{d}_i = 2\pi\rho R_i^3 \vec{u}_i$ im folgenden die mit der Oszillation und Translation verknüpften Monopol- und Dipolmomente bezeichnen sollen. Die Bewegungsgleichungen für die Translation sind entsprechend

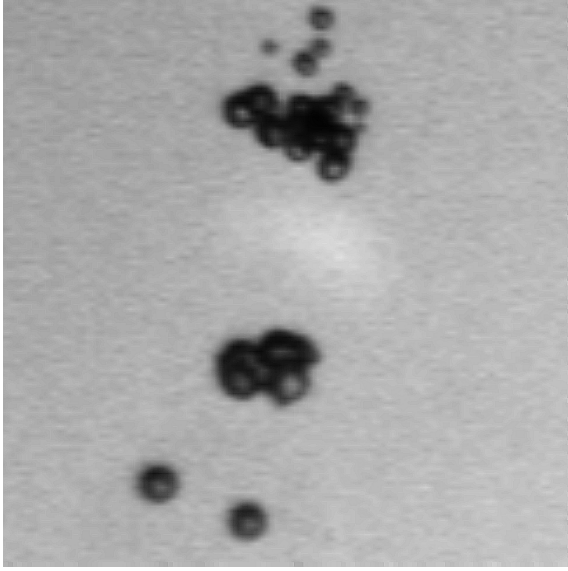


Abb.2: Detailaufnahme eines fragmentierenden Blasenclusters (Bildausschnitt ca. $2 \times 2 \text{ mm}^2$). Die Blasen der sich voneinander entfernenden Teilcluster sind nahezu sphärisch.

gegeben durch

$$\dot{\vec{p}}_i - \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{m,m} + \vec{F}_{ij}^{m,d} + \vec{F}_{ij}^{d,d} = \vec{F}_i^{ex} + \vec{F}_i^g + \vec{F}_i^b. \quad (3)$$

Für den linearen Impuls \vec{p}_i gilt

$$\vec{p}_i = 2\pi\rho \left(\frac{1}{3} R_i^3 \vec{u}_i - \sum_{j \neq i} \dot{R}_j R_j^2 R_i^3 \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{R_i^3 R_j^3}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left(\vec{u}_j - 3 \frac{\vec{r}_{ij}(\vec{u}_j \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^2} \right) \right). \quad (4)$$

Bemerkenswert ist, daß durch die wechselseitige Kopplung Impuls und Geschwindigkeit der i -ten Blase i.a. nicht mehr zueinander proportional sind. Aus der Erhaltung des Impulses (sog. Kelvin-Impuls) folgt aus Gl. (4), daß bei der vorliegenden Kopplung von Oszillation und Translation eine kollabierende Blase eine erhebliche Beschleunigung erfahren kann. Für einen starken Kollaps, wie er für hohe Anregungsamplituden im Experiment typisch ist, ist der Verlust der Sphärizität wahrscheinlich. In der numerischen Simulation ist daher jeweils zu überprüfen, inwieweit die grundlegenden Modellannahmen, insbesondere bzgl. der angenommenen Reynolds- und Weberzahlen, ihre Gültigkeit bewahren. Die Kräfte $\vec{F}_i^{m,m}$, $\vec{F}_i^{m,d}$ und $\vec{F}_i^{d,d}$ in Gl. (3) sind die aus dem effektiven Wechselwirkungspotential der kinetischen Energie folgenden Multipolwechselwirkungen. Die isotrope Monopol-Monopol-Wechselwirkung ist gegeben durch

$$\vec{F}_{ij}^{m,m} = \frac{m_i m_j}{4\pi\rho} \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3} \quad (5)$$

und wird als sekundäre Bjerknes-Kraft bezeichnet, deren Betrag und Vorzeichen durch den Koeffizienten $m_i m_j$ bestimmt wird. Es ist üblich, den zeitlichen Mittelwert dieses Koeffizienten über eine Periode der Anregung zu betrachten. Während für lineare Blasenoszillation eine analytische Aussage möglich ist, zeigt die numerische Simulation für hohe Anregungsamplituden die erhebliche Komplexität dieser Wechselwirkung [6]. Die Monopol-Dipol-Wechselwirkung ist gegeben durch

$$\vec{F}_{ij}^{m,d} = \frac{1}{4\pi\rho} \left(m_j \frac{\vec{d}_i |\vec{r}_{ij}|^2 - 3\vec{r}_{ij}(\vec{d}_i \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^5} - m_i \frac{\vec{d}_j |\vec{r}_{ij}|^2 - 3\vec{r}_{ij}(\vec{d}_j \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^5} \right). \quad (6)$$

Und schließlich ist die Wechselwirkung zweier, sich in dem Fluid bewegnender Blasen durch die Dipol-Dipol-Kraft

$$\vec{F}_{ij}^{d,d} = \frac{3}{4\pi\rho} \left(\frac{\vec{r}_{ij}(\vec{d}_i \vec{d}_j) + \vec{d}_i(\vec{d}_j \vec{r}_{ij}) + \vec{d}_j(\vec{d}_i \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^5} - \frac{5\vec{r}_{ij}(\vec{d}_i \vec{r}_{ij})(\vec{d}_j \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^7} \right) \quad (7)$$

gegeben. Die numerische Simulation reproduziert die Ergebnisse der Untersuchungen zur Wechselwirkung in idealen Blasenströmungen [7,8]. Multipolwechselwirkungen höherer Ordnung werden vernachlässigt.

Diese Arbeit wurde unterstützt durch das Graduiertenkolleg "Strömungsinstabilitäten und Turbulenz" an der Universität Göttingen und INCO Copernicus Vertrag Nr. IC15-CT98-0141.

Literatur

- [1] U. Parlitz, R. Mettin, S. Luther, I. Akhatov, M. Voss & W. Lauterborn, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357**, 313-334 (1999).
- [2] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932.
- [3] G. Russo & P. Smereka, *SIAM J. Appl. Math.* **56**, 327-357 (1996).
- [4] Y. Yurkovetsky & J.F. Brady, *Phys. Fluids* **8**, 881-895 (1996).
- [5] S. Luther, R. Mettin & W. Lauterborn, erscheint in: Proc. Int. Symp. Nonlinear Acoust. (ISNA-15), Göttingen, Germany 1.-4. Sept. 1999.
- [6] R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C.-D. Ohl & W. Lauterborn, *Phys. Rev. E* **56**, 2924-2931 (1997).
- [7] J. B. W. Kok, *Eur. J. Mech., B/Fluids* **12**, 515-540 (1993).
- [8] L. van Wijngaarden, *J. Fluid Mech.* **251**, 55-78 (1993).