

Wie chaotisch ist akustische Kavitation?

STEFAN LUTHER, ULRICH PARLITZ, *MIKHAIL SUSHCHIK und WERNER LAUTERBORN
Drittes Physikalisches Institut, Universität Göttingen
Bürgerstr. 42-44, 37073 Göttingen

*Institute for Nonlinear Science, UCSD, La Jolla, CA 92093-0402, USA

Am Beispiel eines periodisch akustisch angeregten Kavitationsblasenfeldes wird demonstriert, daß aus einer auf mittleren Skalen niedrig-dimensional erscheinenden Delay-Rekonstruktion einer experimentellen Zeitreihe nicht notwendig auf ein physikalisches System mit niedrig-dimensionalem Attraktor geschlossen werden kann. Ursache für dieses allgemeine Phänomen ist die auch im chaotischen Fall vorliegende Phasenkohärenz zwischen den nichtlinearen Oszillatoren und dem treibenden Signal. Zur Illustration werden die Ergebnisse numerischer Simulationen mit experimentellen Zeitreihen verglichen.

Akustische Kavitationsblasenfelder sind nichtlineare dynamische Systeme, die Strukturbildung auf verschiedenen Raum- und Zeitskalen zeigen [1]. Zur Charakterisierung der Komplexität des Systems wurden Methoden der nichtlinearen Dynamik und Zeitreihenanalyse auf Hydrophonsignale der akustischen Emission angewandt [2-4]. Die Dimension des der Dynamik zugrunde liegenden chaotischen Attraktors wurde dabei auf Werte zwischen zwei und drei geschätzt.

In der numerischen Simulation betrachten wir ein System von N sphärischen Blasen mit einer vorgegebenen Verteilung der Ruheradien R_{i0} und Positionen \vec{x}_i . Die Blasen werden von einem äußeren Schallfeld getrieben. Wenn die Drift der Blasen Schwerpunkte vernachlässigt werden kann, so sind die radialen Oszillationen der Blasen durch eine Keller-Miksis-Gleichung [5] in der Form

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\dot{R}_k}{c}\right) R_k \ddot{R}_k + \frac{3}{2} \dot{R}_k^2 \left(1 - \frac{\dot{R}_k}{3c}\right) \\ = \left(1 + \frac{\dot{R}_k}{c}\right) \frac{p_l}{\rho} + \frac{R_k}{\rho c} \frac{dp_l}{dt}, \\ p_l = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0k}}\right) \left(\frac{R_{0k}}{R_k}\right)^{3\kappa} - p_0 - \frac{2\sigma}{R_k} - \frac{4\mu}{R_k} \dot{R}_k - p_a, \\ p_a = p_a(t, \vec{x}_k) = P_a(\vec{x}_k) \cos(\omega t), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1)$$

gegeben, wobei der Punkt die Zeitableitung bezeichnet. Für Luftblasen in Wasser bei 20°C mit einem Polytropenexponenten $\kappa=1.4$ werden die folgenden Parameter verwendet: Oberflächenspannung $\sigma=0.0725$ N/m, Flüssigkeitsdichte $\rho=998$ kg/m³, Viskosität $\mu=0.001$ Ns/m², ambienter Druck $p_0=100$ kPa, Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit $c=1500$ m/s, Anregungsfrequenz $\omega=2\pi \cdot 21$ kHz und der maximale Anregungsdruck $P_a=150$ kPa. In Gleichung (1) bezeichnet p_l den Druck der Flüssigkeit an der Blasenoberfläche. Die numerischen Simulationen wurden durchgeführt mit $K=300$ Blasen, deren Gleichgewichtsradien R_{0k} gleichverteilt im Intervall $[5 \mu\text{m} \dots 30 \mu\text{m}]$ und deren Orte \vec{x}_k gaussverteilt mit Varianz 1 cm gewählt werden. Vereinfachend wird angenommen, daß alle Blasen die gleiche Anre-

gung erfahren.

Der Druck p_k des von der k -ten Blase am Ort \vec{x}_k emittierten, radialsymmetrischen Schallfeldes ist am Aufpunkt \vec{x}_h gegeben durch

$$p_k = \frac{\rho}{r_k} \frac{d}{dt} \left(R_k^2 \dot{R}_k \right) = \frac{\rho}{r_k} \left(R_k^2 \ddot{R}_k + 2R_k \dot{R}_k^2 \right), \quad (2)$$

wobei für den Abstand $r_k = |\vec{x}_k - \vec{x}_h|$ die Bedingung $r_k \ll c/\omega$ gelte. Ist diese nicht erfüllt, so müssen Laufzeiteffekte berücksichtigt werden und es gilt stattdessen

$$p_k = \frac{\rho}{r_k} \frac{d}{dt} \left(R_k^2 \dot{R}_k \right) \Big|_{t-r_k/c}. \quad (3)$$

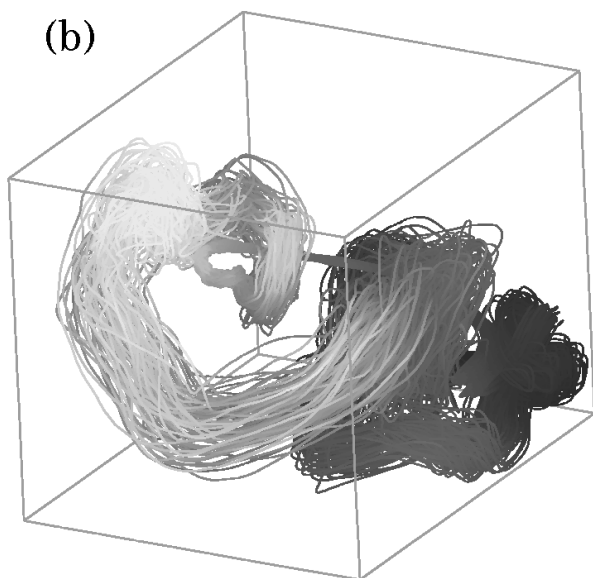
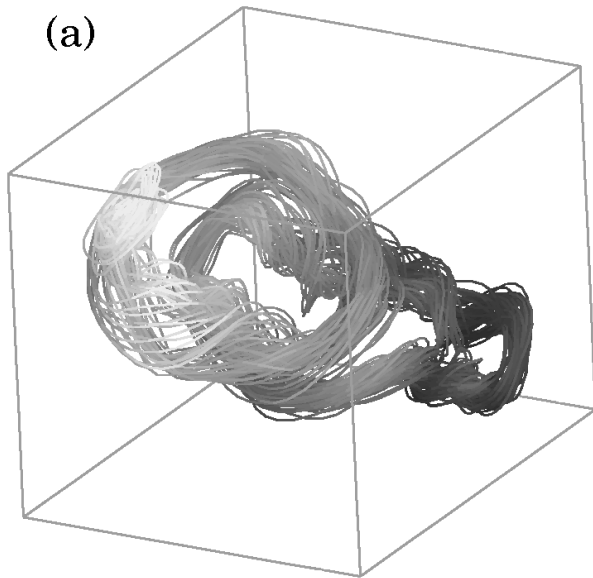
Im Experiment wird die Schallemission des Blasenfeldes mit einem Hydrophon gemessen. In Analogie hierzu wird in der numerischen Simulation der Druck P_h am Aufpunkt \vec{x}_h des Hydrophons bestimmt. Dieser Druck ist durch die Superposition des Anregungsdruckes mit der Summe der Beiträge aller Einzelblasen gegeben, d.h.

$$P_h(t) = p_a(t, \vec{x}_h) + \sum_{k=1}^N p_k(t). \quad (4)$$

Die Übertragungseigenschaften des Hydrophons werden durch ein Tiefpassfilter

$$\ddot{u} + \gamma\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = P_h(t) \quad \text{und} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (5)$$

mit der Abschneidefrequenz $f_0 = 400$ kHz und der Dämpfung $\gamma = 1.41$ nachgebildet. Abbildung 1 zeigt dreidimensionale Attraktorrekonstruktionen $\mathbf{u}(t) = (u(t), u(t + \tau), u(t + 2\tau))$ des experimentell gemessenen Hydrophonsignals (Abb. 1a) und der numerischen Simulation (Abb. 1b) für geeignete Delayzeiten τ [6-8]. Beide Rekonstruktionen ähneln einem verrauschten niedrig-dimensionalen Attraktor. Dennoch ist zumindest das simulierte Hydrophonsignal (Abb. 1b) sehr hochdimensional, da in diesem Beispiel mehr als 70% der $K=300$ Blasen chaotisch sind. Um diese hohe Dimensionalität der Zeitreihe des Hydrophonsignals aufzulösen, ist eine hinreichend große Datenmenge von sehr guter Qualität notwendig.



(a) Typische drei-dimensionale Attraktorrekonstruktion eines experimentellen Hydrophonsignals. (b) Attraktorrekonstruktion eines numerisch simulierten Signals, die der des experimentellen Signals in (a) qualitativ ähnelt.

Zusammenfassung

Bei der Delay-Rekonstruktion von Zeitreihen, die durch hoch-dimensionale dynamische Systeme erzeugt worden sind, können Objekte ("Attrak-

toren") auftreten, die auf experimentell zugänglichen mittleren und großen Skalen niedrig-dimensional erscheinen und erst auf sehr kleinen Skalen ihre wahre, hohe Dimension entfalten. Dieser Effekt ist z.B. zu beobachten bei großen Ensembles getriebener (chaotischer) Oszillatoren. Als Beispiel, wurde ein System von $K=300$ durch ein Schallfeld getriebener Blasen simuliert. Vergleiche mit anderen Oszillatorsystemen zeigen, daß der grundlegende Mechanismus (Phasenbeziehung zwischen periodischer Anregung und chaotischen Oszillatoren) eine typische Erscheinung ist. Die scheinbar niedrige Dimension des rekonstruierten Attraktors kann zu Fehlinterpretationen führen und ist daher u.a. bei Ansätzen zur Steuerung und Kontrolle entsprechender Oszillatorsysteme zu berücksichtigen. Eine Aussage über die tatsächliche Komplexität des experimentellen Systems erfordert in diesen Fällen detailliertere Betrachtungen der involvierten Raum- und Zeitskalen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde gefördert durch die DFG (Graduiertenkolleg "Strömungsinstabilitäten und Turbulenz" an der Universität Göttingen und US ARO (grant No. DAAG-98-1-0269).

Literatur

- [1] U. Parlitz, R. Mettin, S. Luther, I. Akhatov, M. Voss, & W. Lauterborn, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357**, 313–334 (1999).
- [2] W. Lauterborn, & J. Holzfuss, *Phys. Lett.* **115A**, 369–372 (1986).
- [3] W. Lauterborn & E. Cramer, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1445–1448 (1981).
- [4] J. Holzfuss, & W. Lauterborn, *Phys. Lett A* **115**, 369–372 (1986).
- [5] J. B. Keller, & M. Miksis, *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 628–633 (1980).
- [6] H. Kantz, & T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [7] H. D. I. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*, New York: Springer Verlag, 1996.
- [8] U. Parlitz, "Nonlinear Time Series Analysis", in *Nonlinear Modeling - Advanced Black-Box Techniques*, Suykens, J. A. K., and Vandewalle, J. (eds.), Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 209–239.