

Lokale Verfeinerungen

Guido Bartsch*, Andreas Franck

Institut für Technische Akustik, RWTH Aachen, D-52056 Aachen

1 Einleitung

Die Simulation von Luftschallfeldern unter Berücksichtigung wellentheoretischer Effekte basiert auf der numerischen Lösung der Helmholtzschen Differentialgleichung im Feldgebiet Ω :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

mit $k = \frac{\omega}{c}$ und Impedanz- bzw. Neumann-Randbedingungen auf den entsprechenden Randgebieten $\partial\Omega$

$$\frac{p(\vec{x})}{v_{\perp}(\vec{x})} = \text{const} \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega_I \quad (2)$$

$$v_{\perp}(\vec{x}) = \text{const} \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega_N \quad (3)$$

unter der Annahme eines harmonischen Ansatzes.

In den im folgenden diskutierten Fällen wird von einer Finite-Elemente-Diskretisierung ausgegangen. Für räumliche Feldprobleme, wie sie beispielsweise in der Raumakustik auftreten, werden dazu typischerweise Tetraeder oder Hexaeder herangezogen (Abb. 1).

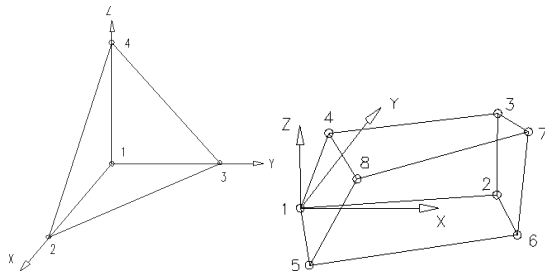


Abbildung 1: Tetraeder- und Hexaeder-Element

Im Rahmen dieses Aufsatzes sollen Möglichkeiten der Genauigkeitssteigerung durch Verfeinerungen der Elementeteilungen vorgestellt werden.

2 Methoden

Zur Einführung in die Problematik soll zunächst ein Überblick über die zwei bekanntesten eingesetzten

Verfahrensweisen bei der FE-Diskretisierung gegeben werden.

2.1 p-Version der FE-Methode

Zur FE-Modellierung werden sogenannte Ansatzfunktion zu finden sein, die die interessierende physikalische Größe – hier den Schalldruck – im Element möglichst gut approximieren. Es ist einsichtig, daß durch die Anzahl der Stützstellen die Genauigkeit der Approximation im Element variiert werden kann. So kann z.B. durch Wahl der sogenannten 'p-Version' der FE-Methode, eine evtl. unzureichende Grunddiskretisierung durchaus noch im Solver kompensiert werden, wenn dort durch Wahl eines höheren Approximationspolynoms (quadratisch, kubisch, etc.) die Näherung im Element verbessert wird.

Ein Vorteil der p-Version bei akustischen Problemen ist, daß sich insbesondere die hier auftretenden glatten Lösungen der Helmholtz-Gleichung mit höherem Polynomgrad wesentlich besser approximieren lassen.

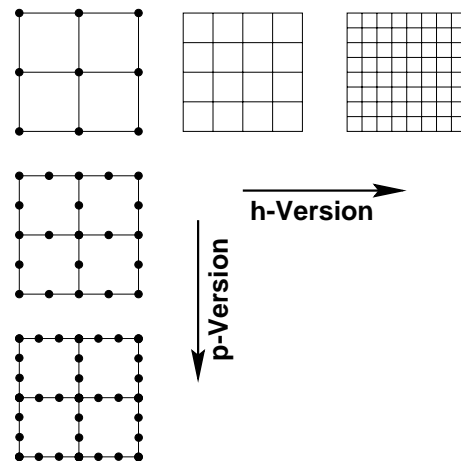


Abbildung 2: h- bzw. p-Version

2.2 h-Version der FE-Methode

Eine alternative Vorgehensweise zur Genauigkeitssteigerung geht nicht vom Approximationspoly-

*Guido.Bartsch@akustik.rwth-aachen.de,
www.akustik.rwth-aachen.de/~bartsch

nom, sondern von der Element-Einteilung des Feldraums aus. Unter Beibehaltung des Polynomgrades der Approximationsfunktion wird hier der Feldraum mit immer kleineren Elementen vernetzt (Abb. 2). Als Qualitätsmaß kann die Maximale Elementkantenlänge h herangezogen werden. Wenn die Zahlenwertbedingung

$$k^2 h < 1 \quad (4)$$

erfüllt ist, so ist die Lösung für alle Wellenzahlen k verlässlich [1].

Diese Bedingung führt bei hohen Wellenzahlen jedoch zu dem nachteiligen Effekt stark ansteigender Rechenzeit und des extremen Speicherplatzverbrauchs für die Systemmatrizen und Vektoren. Durch geschickte Wahl der Speicher- und Rechentechnik auf den typischerweise sparsen Matrizen kann dieser Nachteil jedoch in gewissem Maße wieder kompensiert werden [2]. In vielen praktischen Anwendungen ist jedoch eine Diskretisierung nach Maßgabe der schwächeren 'Sechs Knoten pro Wellenlänge'-Regel ausreichend [4].

2.3 Lokale Verfeinerung

In einem realen Feldraum befinden sich durchaus auch Strukturen, deren geometrische Ausdehnungen klein gegenüber der Wellenlänge sind und die einzeln oder in ihrem Zusammenwirken einen signifikanten Einfluß auf das Schallfeld haben. In der klassischen geometrischen Raumakustik würde man solche Strukturen im Computermodell nicht mehr oder höchstens in Form frequenzspezifischer Wandabsorptions- und -streugrade berücksichtigen. Um die physikalische Wirklichkeit aber auch im Modell korrekt zu erfassen, müssen diese Strukturen durch ein entsprechend feines Gitter wiedergegeben werden. Beim Einsatz wellentheoretisch basierter Verfahren mit uniformen Gittern bestimmt die feinste Struktur im Modell die globale Meshdichte. Der rechentechnische Aufwand bei der Modellierung wäre unverhältnismäßig, da die systembeschreibenden Matrizen mit der dritten Potenz der reziproken Strukturgröße wachsen. Beim Einsatz unstrukturierter Gitter, wie sie beispielsweise bei der FE-Methode angewandt werden, lassen sich durch lokal angepaßte Gitter auch komplexe Probleme ohne Aufgabe von Detailinformation mit vertretbarem Aufwand rechnen.

3 Anwendungen

Im Zusammenhang mit der vorgestellten Thematik ist die Diskussion des Verhaltens von Resonanzabsorboren besonders interessant, um das Prinzip lokaler Verfeinerungen näher zu erläutern.

3.1 Helmholtzresonator

An der rückseitigen Wand eines allseitig schallharten Quaderraums wurde ein Volumen über eine zylinderförmige Durchführung angekoppelt. Die Anordnung bildet einen Helmholtzresonator, der im Resonanzfall Energie aus dem Schallfeld des Quaderraums auskoppelt. Diese Eigenschaft wird in der Praxis zur Unterdrückung unerwünschter Eigenschwingungen eines Raumes ausgenutzt und zwar z.B. durch Anbringung einer gelochten Platte vor einer schallharten Wand. Diese läßt sich dann als flächenhaft wirksame frequenzselektive Absorption auffassen [3].

Zur Verifikation des Verhaltens wurde der Resonator auf die dritte Längsmode des Raumes abgestimmt: Die Resonanzfrequenz f_0 des Resonators ist durch die Fläche S der Durchtrittsöffnung, die Länge der Verengung l , den Radius r des Mündungshalses und das hinter der Verengung angekoppelte Volumen V bestimmt:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{Vl'}} \quad (5)$$

Zur Berücksichtigung der Mündungskorrektur wird als Länge der Verengung das Maß $l' = l + 1,6r$ verwandt. Im vorliegenden Fall wurde $r = 0,05$ m, $l = 0,1$ m und $V = 0,012$ m³ gewählt. Somit liegt die Resonanzfrequenz f_0 bei 104 Hz.

Zur Erzeugung eines ebenen Wellenfeldes wird die der Resonatorwand gegenüberliegende Seite mit einer Neumannschen Randbedingung angeregt. Zur Berücksichtigung der Struktur des Resonators mußte eine lokale Verfeinerung des Gitters an dem Resonator durchgeführt werden. In Abb. 3 ist deutlich der Anstieg der Meshdichte in der Nähe des Resonators zu erkennen.

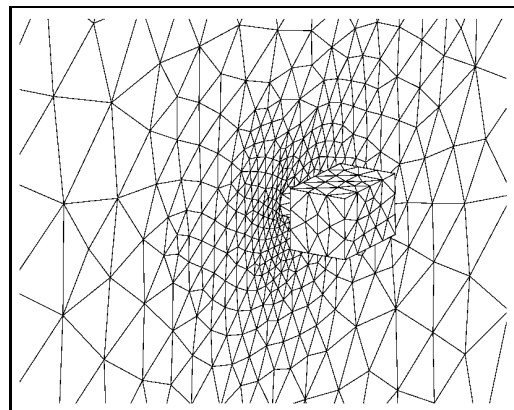


Abbildung 3: Lokale Verfeinerung am Resonator

3.1.1 Ergebnisse

Die numerische Berechnung zeigt, daß durch die Kombination 'Raum plus Helmholtzresonator' weitere Eigenmoden entstehen.

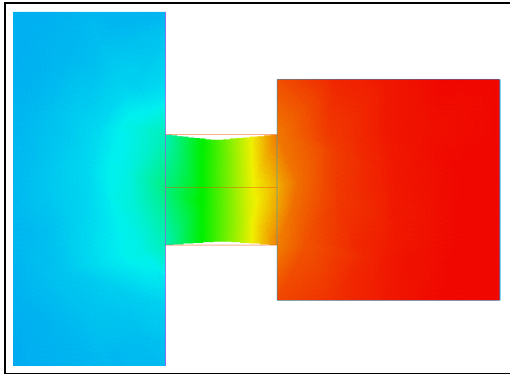


Abbildung 4: Schalldruck im Resonanzfall

In Abb. 4 ist die erste dieser weiteren Eigenmoden für den Resonatorraum in Form eines Isoplots dargestellt. Der Schalldruck innerhalb eines Schnitts durch den Resonator ist in Farbskalierung aufgetragen. Als Eigenfrequenz ergibt sich die analytisch berechnete Resonanzfrequenz aus (5).

Eine detailliertere Analyse des Problems soll hier nicht erfolgen, da diese den Umfang des Papers sprengen würde. Es sei aber darauf hingewiesen, daß nur mit der Technik der lokalen Verfeinerung eine hinreichend genaue Modellierung der Wirkung des Resonators auf den Feldraum möglich wurde. Diese Technik ist somit zur numerischen Bestimmung von Absorptions- und Streugraden von beliebig strukturierten Körpern geeignet.

3.2 Topfschalldämpfer

Als weiteres Modell soll das eines Topfschalldämpfers dienen. Das Aufeinanderfolgen von Rohrerweiterungen und -verengungen ergibt ein akustisches Tiefpaßfilter (Abb. 5). In vereinfachter Form kann ein derartiges System elektrisch durch ein LC-Glied repräsentiert werden [5].

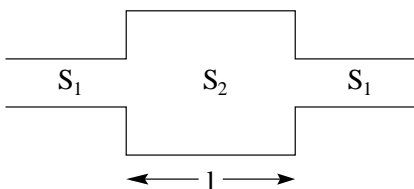


Abbildung 5: Modell eines Topfschalldämpfers

Dies ist jedoch nur im tiefsten Frequenzbereich zulässig, d.h. solange alle geometrischen Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind. Im höheren

Frequenzbereich wird oft ein vereinfachtes analytisches Modell herangezogen, bei dem die Reflexionen der Welle an den den Querschnittssprüngen berücksichtigt werden. Es ergibt sich dann eine Kammfilter-Charakteristik, bei der die Dämpfung durch den das Verhältnis $m = \frac{S_2}{S_1}$ der Rohrquerschnitte bestimmt ist.

In Abb. 6 ist das im Ansatzrohr verfeinerte Gittermodell des Schalldämpfers dargestellt.

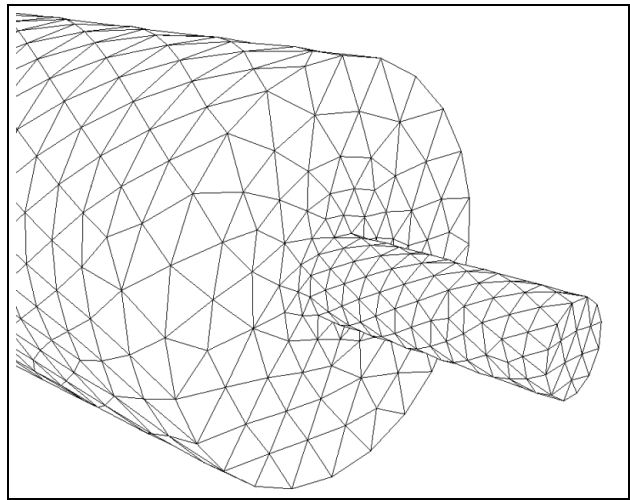


Abbildung 6: Mesh des Topfschalldämpfers

Durch eine Impedanzbetrachtung an der Querschnittssprüngen läßt sich das Übertragungsmaß im vereinfachten analytischen Modell zu

$$|H(f)| = -10 \log \left[1 + \left(\frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{m} \right) \sin(kl) \right)^2 \right] \quad (6)$$

bestimmen.

Vernachlässigt ist hierbei insbesondere die Helmholtzresonanz des gesamten Luftvolumens.

3.2.1 Ergebnisse

In Abb. 7 sind die aus der FE-Rechnung und die aus dem vereinfachten analytischen Modells gewonnenen Übertragungsmaße einander gegenübergestellt.

Während die Resonanzüberhöhungen hinsichtlich ihrer Frequenzen perfekt übereinstimmen, differieren die Amplituden geringfügig. Eine Verifikation mit Messungen zeigte, daß nur die aus der FE-Rechnung gewonnenen Ergebnisse die Realität einwandfrei abbilden.

Man beachte, daß im Feldraum des Topfes eine grobe Diskretisierung vollkommen ausreichend ist. Am Querschnittssprung ist zur korrekten Abbildung des hohen Schalldruckgradienten (Abb. 8) eine lokale Verfeinerung notwendig.

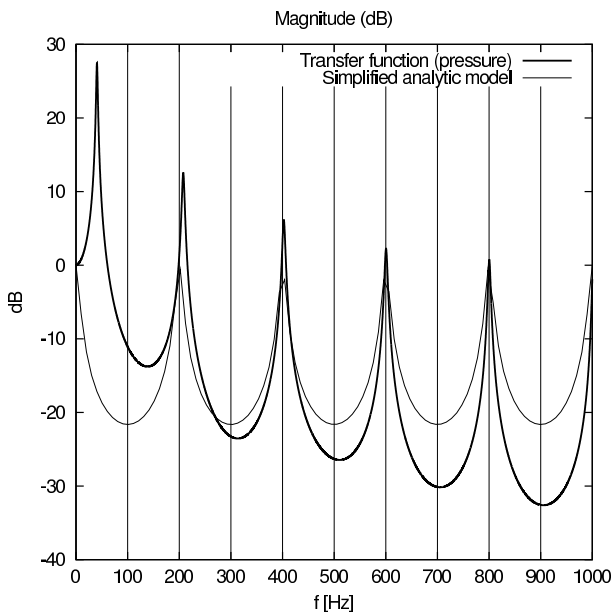


Abbildung 7: Vergleich FE-Modell und vereinfachtes analytisches Modell

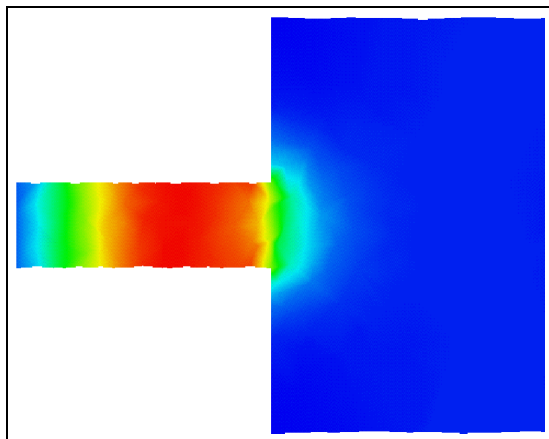


Abbildung 8: Schalldruckgradient im Topfschalldämpfer bei $f = 300$ Hz

4 Zusammenfassung

Bei der praktischen Durchführung einer Simulation mittels Finiter Elemente Methode (FEM) müssen verschiedene Bedingungen erfüllt sein. Eine davon ist, daß das zu betrachtende Volumen geeignet diskretisiert sein muß. Für die Simulation in fluiden Medien wird bislang eine Diskretisierung mit sechs Knoten pro Wellenlänge als ausreichend bezeichnet. Dies ist jedoch nur dann zutreffend, wenn sich im Volumen keine Strukturen befinden, die klein im Vergleich zur Wellenlänge sind.

Anhand des Helmholtzresonators wurde gezeigt, daß das Vorhandensein derartiger Strukturen zu einer signifikanten Beeinflussung des Schallfeldes führen kann. Die häufig bereits vorhandene

Strukturinformation eines Modells ist daher bei der FE-Simulation im Rahmen der Modellierung grundsätzlich miteinzubeziehen. Prinzipiell ist auf diesem Wege auch die rechentechnische Bestimmung von frequenzabhängigen Wandabsorptions- und Streugraden möglich.

Auch aus rechentechnischen Gesichtspunkten ist die Berücksichtigung von Details nicht kontraindiziert, da durch die Verwendung unstrukturierter Gitter mit lokalen Verfeinerungen auch komplexe Probleme ohne Aufgabe von Detailinformation mit vertretbarem Aufwand rechenbar sind. Hinzu kommt, daß selbst von einem guten Akustiker nicht von vornherein einzuschätzen ist, wie groß der Einfluß derartiger Details ist. Zur lokalen Verfeinerung kann die h-Version der FE-Methode herangezogen werden.

5 Ausblick

In Kombination mit einem Fehlerschätzer kann auf die h-Version der FEM aufbauend, ein Algorithmus zur adaptiven 3D-Gitterverfeinerung entwickelt werden. Damit wird es möglich sein, akustische Probleme unter Berücksichtigung von Phaseneffekten mit minimaler Knotenzahl zuverlässig zu lösen. Bei Hinzunahme von Multigrid-Lösern kann darüber hinaus ein effektiver Multilevel-Vorkonditionierer für einen effizienten Gleichungssystemlöser mit optimaler Komplexität geschaffen werden.

Literatur

- [1] BABUSKA, I. M. und S. A. SAUTER: *Is the Pollution Effect of the FEM Avoidable for the Helmholtz Equation Considering High Wave Numbers?* Society for Industrial and Applied Mathematics, 42:451–484, 2000.
- [2] BARTSCH, G. und A. FRANCK: *Hybrid and Parallel Extension of Sound Field Simulation for Interior Problems.* In: *Proc. of the 7th International Congress on Sound and Vibration (ICSV)*, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2000.
- [3] KUTTRUFF, H.: *Room Acoustics.* Spon Press, London, New York, 4. Auflage, 2000.
- [4] MARBURG, S.: *Zur Regel von den sechs Elementen pro Wellenlänge bei BEM.* In: *Fort-schritte der Akustik*, Seiten 706–707, DAGA Oldenburg, 2000.
- [5] MECHEL, F. P.: *Schallabsorber*, Band II. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1995.