

Halbunendliche Finite Elemente: Umhüllende, Genauigkeit, Kondition und Polynomwahl

Daniel Dreyer, Otto von Estorff
TU Hamburg-Harburg, Hamburg

1. Einführung

In der jüngeren Vergangenheit hat die numerische Simulation akustischer Fragestellungen extrem an Bedeutung gewonnen. Der Wunsch nach geringerer Lärmbelastung unserer Umwelt fordert genaue und verlässliche Berechnungsverfahren, um bereits in der Entwicklungsphase das akustische Verhalten von Prototypen positiv beeinflussen zu können. Zur Untersuchung von Schallabstrahlungsproblemen wird in der Regel die Boundary-Elemente-Methode (BEM) eingesetzt, oft aber auch die Methode der halbunendlichen Finiten Elemente (IFEM).

IFEM-Simulationen besitzen gegenüber BEM-Berechnungen unter anderem folgende Vorteile:

- es ist keine aufwendige Kopplung mit anderen Rechenverfahren erforderlich (ganzheitliche FE-Simulation),
- eine Berücksichtigung von Nichtlinearitäten ist möglich,
- es treten dünnbesetzte Systemmatrizen auf, die bei üblichen iterativen Gleichungslösern vorteilhaft sind.

Die Entwicklung halbunendlicher FE hat seit den Anfängen in den 70er Jahren große Fortschritte gemacht. Besonders die Klasse von Elementen, die das physikalische Verhalten von Schallquellen nachbilden, wurde bereits erfolgreich in kommerzieller Berechnungssoftware eingesetzt [1, 2]. Die als robust und relativ anspruchslos in Bezug auf die Form der Umhüllenden geltenden „Mapped Wave Envelope Elemente“ (auch: „Astley-Leis-Elemente“) werden nachfolgend näher betrachtet.

2. Vorgehen, Umhüllende

Bei der akustischen Simulation mit Hilfe von Diskretisierungsverfahren sind besonders die Größe und die Komplexität des Elementmodells entscheidend für die Güte und Genauigkeit der Untersuchung. Das Aufstellen, die Handhabung und die Lösung großer (Gleichungs)-Systeme ist immer noch das Kriterium für die „Machbarkeit“ einer Untersuchung.

Im Fall einer IFEM-Simulation geht man zunächst von einer konventionell mit FE diskretisierten, schallabstrahlenden Struktur aus. Um diese und einen Teil des Fluid-Bereiches wird eine Umhüllende definiert und der Raum zwischen Strukturoberfläche und Umhüllender mit konventionellen Akustik-Elementen diskretisiert. Dabei beeinflusst die Entfernung der Umhüllenden von der Struktur die Genauigkeit der Lösung und die Größe des zu lösenden Gleichungssystems erheblich. Weit entfernte Umhüllende erlauben den Einsatz einfacher halbunendlicher Elemente mit geringeren radialen Polynom-Ansätzen, vergrößern aber die Zahl der Freiheitsgrade im Fluid beachtlich. Umhüllende in der Nähe der Struktur verringern zwar die Größe des Gleichungssystems, erfordern aber halbunendliche Elemente mit höherwertigeren Ansätzen, besonders in radialer Richtung. Auf die damit entstehenden Schwierigkeiten wird im Folgenden näher eingegangen.

Die Form der Umhüllenden sollte üblicherweise in Abhängigkeit von der zu untersuchenden Struktur gewählt werden. Die meisten halbunendlichen FE bieten lediglich die Definition der Umhüllenden als Kugel, Spheroid und Ellipsoid. Astley-Leis-Elemente sind hingegen aufgrund ihrer Koordinatenabbildung („Mapping“) bei der Wahl der Umhüllenden flexibler [3].

Trotzdem sollte auch hier der zugrundeliegende physikalische Ansatz, die Atkinson-Wilcox-Reihe [4], berücksichtigt werden.

Am Beispiel einer einfachen, kraftangeregten Struktur wurde in [5] gezeigt, welchen Einfluß die Form der Umhüllenden im Falle der Astley-Leis-Elemente auf die Genauigkeit der Ergebnisse hat.

3. Formulierung der IFEM

Die Formulierung der halbunendlichen Astley-Leis-Elemente wurde in [3] ausführlich beschrieben. Wie in [6] konzentrieren wir uns auf einen eindimensionalen Ähnlichkeitsfall für 3D. Die Diskretisierung eines Horns (Bild 1) mit Querschnitt $A(x) = cx^2$ ist unter Vernachlässigung der Variation in Umfangsrichtung identisch mit einer dreidimensionalen Darstellung.

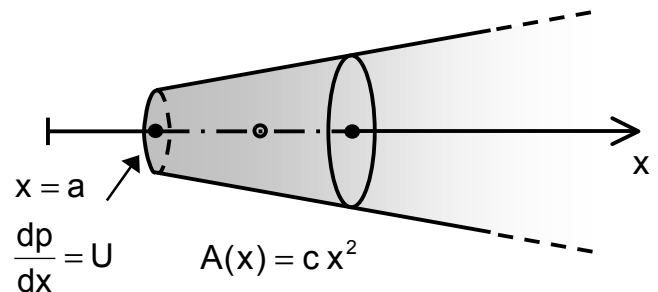


Bild 1: Akustisches Horn mit Querschnitt $A(x)$, Schnelle-Randbedingung am linken Ende, rechts offen

Bei Vorgabe einer harmonischen Anregung in Form einer Schnelle U an der Stelle a in Richtung der x -Achse (Normalenrichtung) ergibt sich der Schalldruck $p(x)$ zu [6]:

$$p(x) = \frac{i\rho c k a U}{1 + i k a} \frac{a}{x} e^{-ik(x-a)} \quad (1)$$

Hierbei ist ρ die Dichte des akustischen Mediums, c die Wellengeschwindigkeit und k die Wellenzahl.

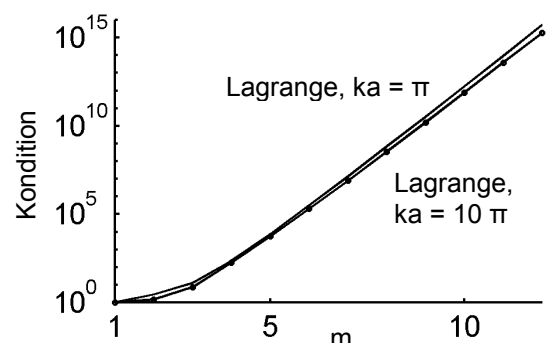


Bild 2: Kondition der Gesamtmatrix des in Bild 1 dargestellten Horns für zwei verschiedene Wellenzahlen

Diskretisiert man, wie in Bild 1 gezeigt, das Horn mit einem einzelnen Astley-Leis-Element mit variabler radialer Knotenzahl m , so erhält man die in Bild 2 dargestellten Konditionen der (komplexen) Gesamtsystemmatrix.

Wie schon anderweitig bestätigt [7] versagen die Astley-Leis-Elemente mit Lagrange-Polynom-basierter radialer Approximation aufgrund schlechter Konditionierung. Astley et al. [1] schlugen daher eine auf Shirron, Babuška [8] zurückzuführende Modifikation der Elemente vor, bei der an Stelle von Lagrange-Polynomen, in Anlehnung an die p-FEM, Legendre-Polynome

benutzt wurden. Die Ergebnisse für ein dreidimensional vernetztes Spheroid mit dem Hauptachsenverhältnis $a : b = 2 : 1$ sind in Bild 3 wiedergegeben. Es zeigt sich eine deutliche Verbesserung der Konditionierung.

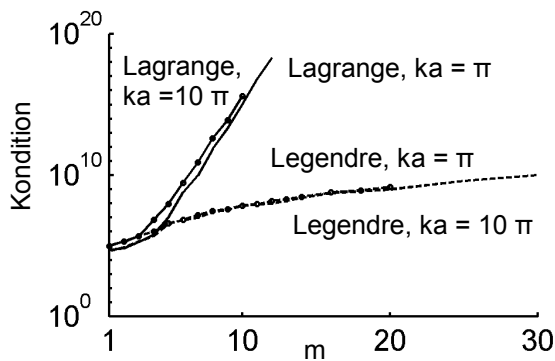


Bild 3: Kondition der Systemmatrix eines Spheroids, diskretisiert mit Astley-Leis-Elementen mit variabler radialer Knotenzahl für Lagrange- und Legendre-Polynome [1]

Bei näherer Betrachtung der Formulierung der Astley-Leis-Elemente läßt sich erkennen, dass der radiale Polynomansatz weiter optimiert werden kann. Die Ansatzfunktionen

$$p(v) = \frac{1-v}{2} \times P^m(v) \quad (1)$$

(wobei $P^m(v)$ ein Polynom vom Grad m in v ist) beinhalten den Vorfaktor $(1-v)/2$. Dieser Term stellt sicher, dass die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung erfüllt wird. Wie in jedem Galerkinischen Fehlerminimierungsverfahren werden in der Regel Ansatzfunktionen mit sich selbst bzw. Ableitungen ihrer selbst multipliziert. Dies ergibt ein übliches Gewicht $(1-v)^2$ und ermöglicht den Einsatz von verallgemeinerten orthogonalen Polynomen, den Jacobi-Polynomen. Diese Polynome bilden für folgendes Produkt ein Orthogonalsystem:

$$\int (1-v)^\alpha (1+v)^\beta P_i(v) P_j(v) dv = 0, \quad i \neq j, \quad \alpha, \beta > -1 \quad (1)$$

Ihre Anwendung im Falle des oben dargestellten Horns führt zu den in Bild 4 und 5 dargestellten Konditionen. „Legendre mod.“ steht für eine modifizierte Version der in [8] benutzten Elemente (wobei zu beachten ist, dass die Elemente in [8] kein $1/r^2$ -Gewicht enthalten).

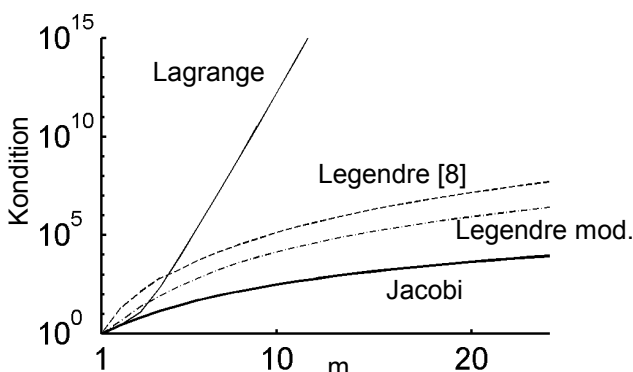


Bild 4: Kondition der Systemmatrix für das Horn (Bild 1) bei Verwendung von Astley-Leis-Elementen mit variabler radialer Knotenzahl und unterschiedlichen Polynomansätzen, $ka = \pi$

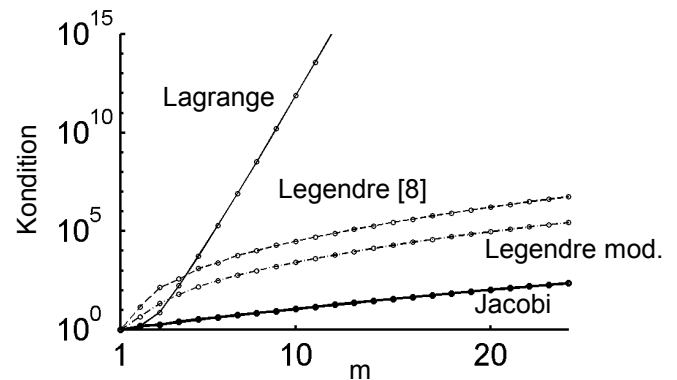


Bild 5: Kondition der Systemmatrix für das Horn (Bild 1) bei Verwendung von Astley-Leis-Elementen mit variabler radialer Knotenzahl und unterschiedlichen Polynomansätzen, $ka = 10\pi$

4. Zusammenfassung

In der gegenwärtigen Arbeit wurde der Aspekt der Konditionierung von höherwertigen radialen Ansätzen bei Astley-Leis-Elementen betrachtet. Diese Ansätze sollen möglichst kleine und effiziente Umhüllende ermöglichen, mit denen das akustische Verhalten besonders komplexer Strukturen effizient simuliert werden kann.

Für einen vereinfachten Fall konnte eine Verbesserung von Legendre-basierten Elementen gezeigt werden. Durch die Wahl neuer Polynome konnte eine deutliche Verbesserung der Kondition der zugrundeliegenden Systemmatrix erreicht werden. Unter Vernachlässigung der Nebenkopplerterme ermöglicht dies die effektive Nutzung radial höherwertiger Astley-Leis-Elemente.

Literatur

- [1] **Astley, R. J., Hamilton, J. A., Wilkinson, B. S.:** *Accuracy and Conditioning of Infinite Element Schemes for Exterior Acoustics*. Proc. of the ICSV7 Garmisch-Partenkirchen, Deutschland (2000).
- [2] **LMS International:** *SYSNOISE Rev 5.5, User's Manual*, Leuven, (2000).
- [3] **Astley, R. J., Macaulay, G. J., Coyette, J.-P., Cremers, L.:** *Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. Part I. Formulation in the frequency domain*. Journal of the Acoustical Society of America **103**(1), 49-63 (1998).
- [4] **F. Ihlenburg:** *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Appl. Math. Sciences 132, Springer, New York (1998).
- [5] **Zaleski, O., von Karstedt, W.-C., von Estorff, O.:** *Zur Modellierung mit Boundary Elementen und Finiten Elementen bei Schallabstrahlungsberechnungen*. Erste deutschsprachige Anwenderkonferenz SYSNOISE, Bühlerhöhe, Deutschland (1999).
- [6] **Astley, R. J., Macaulay, G. J., Coyette, J.-P.:** *Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering*. Journal of Sound and Vibration **170**(1), 97-118 (1994).
- [7] **Morgan, S., Hardie, D. J. W., Macey, P. C.:** *Robustness of Boundary Element and Wave Envelope Element Formulations Applied to Exterior Coupled Acoustic Problems*. Proc. of the ICSV7 Garmisch-Partenkirchen, Deutschland (2000).
- [8] **Shirron, J. J., Babuška, I.:** *A comparison of approximate boundary conditions and infinite element methods for exterior Helmholtz problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **164**, 121-139 (1998).