Iterative Lösung von Außenraumproblemen mit halbunendlichen Finiten Elementen

Daniel Dreyer, Otto von Estorff
TU Hamburg-Harburg, Hamburg

1. Einführung

Die Simulation von Außenraumproblemen bleibt, trotz großer Fortschritte in den letzten Jahrzehnten, ein aktuelles Forschungsgebiet in der Akustik. Besonders Fragen zur Umweltbelastung sind für die Öffentlichkeit von zentralem Interesse. Auch der Wunsch nach verbessertem akustischen Komfort und erhöhter Klangqualität erfordern verbesserte Vorhersagen für das akustische Verhalten verschiedenster technischer Systeme. Schallabstrahlungsprobleme werden in der Regel mit der Boundary-Elemente-Methode (BEM), aber auch immer öfter mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM), in Verbindung mit halbunendlichen Finiten Elementen, untersucht. Die weitreichenden und umfassenden Erfahrungen mit der FEM prädestinieren diese Methode für die Lösung insbesondere Fluid-Struktur-gekoppelter, nichtlinearer Systeme.

Halbunendliche Finite Elemente erlauben die Erfassung der Abstrahlung von Wellen ins Unendliche. Es existieren zahlreiche Entwicklungen, die sich in den letzten Jahren herausgebildet haben. Von diesen Formulierungen besitzen die Astley-Leis oder Mapped Wave Envelope Elemente herausragende Vorteile. So können die Elemente sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich eingesetzt werden, die Nachlaufrechnung für Ergebnisse im Außenraum ist äußerst effektiv und der Koordinatentransformationsansatz ermöglicht eine universelle Einsetzbarkeit. Im folgenden werden die Astley-Leis Elemente näher untersucht, wobei vor allem der Einsatz in Verbindung mit iterativen Gleichungslösern diskutiert wird.

2. Außenraumproblem und Umhüllende

Bei der Berechnung akustischer Fragestellungen mit halbunendlichen Finiten Elementen wird um die vibrierende Struktur zunächst eine Umhüllende Γ definiert, die den Nahbereich Ω_i einschließt. Die Form der Umhüllenden ist im Rahmen von Koordinatensystemen, in denen die Helmholtz-Gleichung separierbar ist, frei wählbar. Im folgenden wird eine kugelförmige Umhüllende angenommen, obwohl auch eine ellipsoidal oder oblat/prolat spheroidal geformte Fläche möglich ist. Auf der Umhüllenden werden die halbunendlichen Elemente definiert. Durch sie wird im Außenraum Ω_e die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung erfüllt. An der Oberfläche der Struktur B kann bereichsweise entweder eine Schnelle- oder eine Druckverteilung als Randbedingung für das Fluid vorgegeben werden (siehe Bild 1). Im inneren Gebiet Ω_i füllen konventionelle Finite Elemente den Raum zwischen der Struktur und der Umhüllenden aus. Der Außenraum Ω_e wird durch Astley-Leis Elemente repräsentiert.

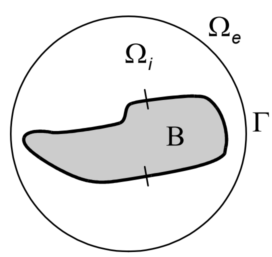

Bild 1: *Geometrie des Außenraumproblems.*

3. Formulierung und Kondition der IFEM

Bereits 2001 hatten Dreyer und von Estorff [1] eine Verbesserung der Astley-Leis Elemente für eindimensionale Probleme vorgeschlagen. Das bis dahin nicht ganz zufriedenstellend gelöste Problem der schlechten Kondition bei hohem Approximationsgrad in radialer Richtung konnte gelöst werden, in dem an Stelle von Lagrange (Lag) oder Legendre (Leg) Polynomen Jacobi (Jac) Polynome in der Formulierung verwendet werden. Die in [1] vorgeschlagenen Elemente werden nachfolgend auf drei Dimensionen erweitert, ähnlich wie in Astley et al. [2]. Zudem werden, neben den bereits vorgeschlagenen Jacobi Polynomen mit α=2, β=0, weitere Polynombasen mit Parameterwerten (α,β) aus {(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)} eingeführt.

Betrachtet seien zwei Konfigurationen eines Kugelstrahlers: In Bild 2(a) ist die Diskretisierung eines Strahlers gezeigt, bei dem die Umhüllende Γ und damit die halbunendlichen Finiten Elemente direkt auf der Oberfläche des Kugelstrahlers liegen. Nur ein Viertel des Kugelstrahlers ist aufgrund der Symmetrie diskretisiert. Bei der Diskretisierung in Bild 2(b) wurde zusätzlich eine Lage konventioneller Finiter Elemente zwischen dem Strahler und der Umhüllenden eingefügt.

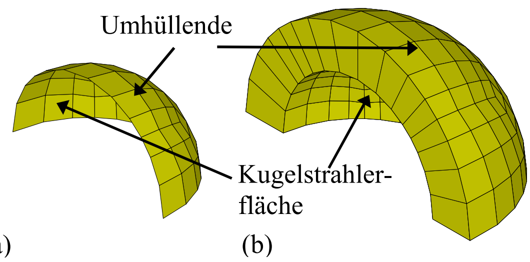

Bild 2: *Kugelstrahler und Umhüllende, (a) mit ausschließlich halbunendlichen Finiten Elementen, (b) mit einer Lage konventioneller Elemente und daran anschließenden halbunendlichen Finiten Elementen.*

Erste rechnerische Untersuchungen zeigen, dass verbesserte Astley-Leis-Elemente auch in drei Dimensionen die aus [1] bekannte, hervorragend niedrige Kondition, siehe Bild 3, aufweisen.

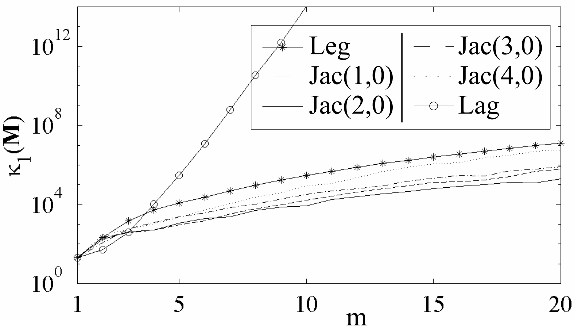

Bild 3: *1-Kondition der Systemmatrix* **M** *der halbunendlichen Finiten Elemente aus Bild 2(a) bei Frequenz $f = f_{max}$, (für 6 lineare Elemente pro Wellenlänge).*

Hier ist beispielhaft die Gesamtkondition (bezogen auf die 1-Norm) über dem radialen Approximationsgrad m aufgetragen. Dasselbe Verhalten konnte auch bei anderen Konfigurationen betrachtet werden.

4. Iterative Lösung von Gleichungssystemen

Bei der Berechnung akustischer Probleme sind häufig große Gleichungssysteme zu lösen, was den Einsatz iterativer Lösungsverfahren an Stelle der direkten Verfahren sinnvoll erscheinen lässt. Der Speicherbedarf und der Rechenaufwand direkter Verfahren, wie z.B. der LU-Zerlegung, wächst mit der Größe des Gleichungssystems. Iterative Verfahren hingegen sind üblicherweise deutlich günstiger in Bezug auf Speicherbedarf. Nachteilig bei solchen Verfahren ist jedoch die Tatsache, dass die Lösung des Gleichungsystems nicht mehr „garantiert" gefunden wird. Es gibt Situationen, in denen iterative Verfahren nicht konvergieren und damit scheitern. Auf dem Gebiet der Helmholtzgleichung für Innenraumprobleme, also *ohne* halbunendliche Finite Elemente, wurden jedoch äußerst robuste Verfahren entwickelt [3, 4]. Magolu monga Made und Van der Vorst [4] verwenden hier zwei iterative Verfahren, QMR (quasi-minimal-residual) und GMRES (generalized minimal residual). Beide Methoden zeigen, in Verbindung mit einem parallel implementierten Präkonditionierer, hervorragendes Verhalten, und wurden daher auch in dieser Arbeit verwendet. Zusätzlich kam im Rahmen der Untersuchungen der Löser BiCGSTAB (stabilized bi-conjugate gradient method) zum Einsatz. Dieses Verfahren zeigte sich jedoch bei höheren Frequenzen als instabil; Ergebnisse werden daher im Folgenden nicht gezeigt. Details zu iterativen Verfahren und Präkonditionierern sind in [5] zu finden.

Während die Verwendung iterativer Löser bei Zeitbereichsrechnungen in Verbindung mit halbunendlichen Finiten Elementen gute Ergebnisse zeigten [6], wurden im Frequenzbereich bisher keine guten Erfahrungen gemacht [7]. Die mittels Jacobi-Polynomen verbesserten Astley-Leis Elemente haben sich hier als eine äußerst stabile Alternative herausgestellt. Es wurden QMR, GMRES mit restart-Parameter (20) und BiCGSTAB auf verschiedene Konfigurationen, unter anderem auch auf die in Bild 2 gezeigten Systeme, angewandt. Im Folgenden sind nur Ergebnisse mit dem QMR Verfahren gezeigt. Bild 4 gibt exemplarisch die erforderliche Anzahl von Iterationen für ein nicht präkonditioniertes QMR Verfahren, angewandt auf den Kugelstrahler Bild 2(b), wieder. Es zeigt sich, dass Jacobi-Polynome (2,0) das stabilste Verhalten vorweisen.

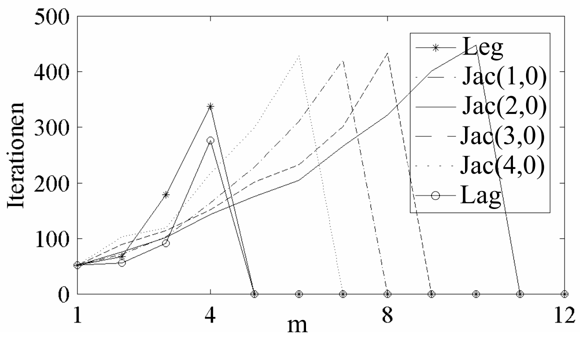

Bild 4: *Iterationen bei QMR Verfahren, in Abhängigkeit vom radialem Approximationsgrad* m*, f=2 f_{max}, System aus Bild 2(b).*

Neben Rechnungen ohne Präkonditionierung wurden auch Rechnungen mit einer „zero-level fill in" LU-Präkonditionierung [5] durchgeführt. Das bedeutet, dass *vor* QMR, GMRES(20) bzw. BiCGSTAB die Gesamtmatrix mit einem unvollständigen LU-Verfahren vorbereitet wird, welches in der Regel relativ schnell ist. Bild 5 zeigt beispielhaft das äußerst gutmütige Verhalten der Jacobi-Polynome mit Parameter (2,0), während andere Polynome bereits bei kleinen Approximationsgraden m zum Versagen der iterativen Löser führen.

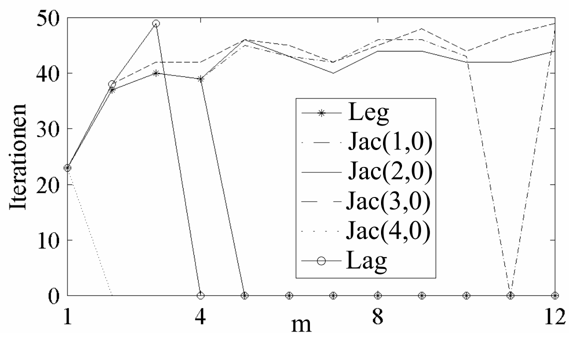

Bild 5: *Iterationen bei QMR Verfahren, iLU-präkonditioniert, in Abhängigkeit vom radialem Approximationsgrad* m*, f=2 f_{max}, System aus Bild 2(b).*

5. Zusammenfassung

Ausgehend von einer eindimensionalen Formulierung [1] wurde in dieser Arbeit ein auf drei Dimensionen erweiterter Ansatz optimierter halbunendlicher Finiter Elemente vorgestellt. Dabei konnte dieselbe hervorragende Kondition der Elemente wie in [1] beobachtet werden. Zusätzlich zeigen die neuen Elemente ein deutlich stabileres Verhalten in Verbindung mit iterativen Gleichungslösern, womit die Lösung extrem großer und komplexer Außenraumprobleme mittels der FEM und halbunendlicher Finite Elemente maßgeblich verbessert wird.

Die neuen Elemente sind unabhängig von ihrem radialen Approximationsgrad gut konditioniert. Dies ermöglicht eine effektive Verkleinerung der Umhüllenden und damit eine deutliche Reduktion der Anzahl der für das Gesamtsystem erforderlichen Finiten Elemente.

Literatur

[1] **Dreyer, D., von Estorff, O.:** *Halbunendliche Finite Elemente: Umhüllende, Genauigkeit, Kondition und Polynomwahl.* Fortschritte der Akustik: DAGA, Hamburg. (2001).

[2] **Astley, R. J., Macaulay, G. J., Coyette, J.-P., Cremers, L.:** *Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. Part I. Formulation in the frequency domain.* Journal of the Acoustical Society of America **103**(1), 49-63 (1998).

[3] **Magolu monga Made M.:** *Performance of parallel incomplete LDL^T factorizations for solving acoustic wave propagation problems from industry.* Numerical Linear Algebra with Applications. (eingereicht)

[4] **Magolu monga Made M., Van der Vorst H.A.:** *Spectral analysis of parallel incomplete factorisations with implicit pseudo-overlap.* Numerical Linear Algebra with Applications. **9**(1), 45-64 (2002).

[5] **Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H.:** *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods.* SIAM (1994).

[6] **Astley R.J., Hamilton J.A.:** *Numerical studies of conjugated infinite elements for acoustical radiation.* Journal of Computational Acoustics **8**, 1-24 (2000).

[7] **Eaton J.A., Regan B.A.:** *Application of the finite element method to acoustic scattering problems.* AIAA Journal. **34**(1), 29-33 (1996).

[8] **Dreyer, D., von Estorff, O.:** *Improved conditioning of infinite elements for exterior acoustics.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, (submitted).