

# Randelemente-Methode für poröse Absorber

E. Sarradj

*Institut für Akustik und Sprachkommunikation, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden*

## EINLEITUNG

Die Dämpfung von Schall durch poröse Absorber spielt für viele Anwendungen in allen Gebieten der Akustik eine große Rolle, z.B. in Schalldämpfern oder aber auch bei der Ausbreitung von Schall über absorbierenden Untergrund.

Für ausreichend einfache Konfigurationen von porösen Absorbern stehen analytische Berechnungsmethoden zur Verfügung, mit deren Hilfe einige praktisch interessierende Probleme behandelt werden können. In vielen Situationen ist die Anwendung analytischer Methoden jedoch kaum möglich oder durchführbar. Dann bieten sich numerische Methoden an. Als eine dieser Methoden wird die Randelemente-Methode (Boundary Element Method, BEM) bereits in vielen ähnlichen Fällen angewendet [1], bei denen jedoch nur die Schallausbreitung außerhalb von porösen Absorbern betrachtet wird. Obwohl es ohne weiteres möglich erscheint, auch die Schallausbreitung innerhalb von Absorbern mit der BEM zu untersuchen, sind Berichte darüber in der Literatur kaum zu finden; eine Ausnahme ist [2]. Selten interessiert die Schallausbreitung im Absorber allein, sondern meist auch in der Umgebung. Zur Behandlung mit der BEM können die Umgebung und der Absorber als einzelne Gebiete betrachtet und über Koppelbedingungen verknüpft werden.

## THEORIE

Die Schallausbreitung in porösen Absorbern mit starrem Skelett verläuft äquivalent zur Schallausbreitung in einem verlustbehafteten Fluid, das durch eine Wellenzahl  $\underline{k}$  und eine Wellenimpedanz  $\underline{Z}$  charakterisiert ist. Diese Kennwerte können aus den Parametern des Absorbers (Porosität, längenbezogener Strömungswiderstand, Tortuosität) berechnet werden, z.B. [3]. Wegen der Berücksichtigung der Dämpfungsverluste sind sie komplex, während sie für die Schallausbreitung in Luft meist als rein reell angenommen werden. Auch bei der Aufstellung der Kirchhoff-Helmholtz-Integralgleichung (KHI) als Grundlage für die BEM ist demzufolge  $\underline{k}$  komplex zu verwenden.  $\underline{k}$  ist im Argument der Greenschen Funk-

tion  $\underline{G}$  enthalten, das damit komplex wird. Für die Berechnung in 2 Dimensionen bedeutet das:

$$\underline{G}_{2D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(\underline{k}r), \quad r = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|. \quad (1)$$

Die Diskretisierung der KHI durch Zerlegung des Randes des betrachteten Gebietes mit Hilfe von Randelementen und nachfolgende Kollokation liefert ein Gleichungssystem

$$\mathbf{H}\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{p}_I = \mathbf{C}\mathbf{p}, \quad (2)$$

das als Unbekannte den Schalldruck  $\underline{p}$  sowie seine Normalenableitung  $\underline{q} = \partial \underline{p} / \partial \mathbf{n}$  an den Knoten der Randelemente enthält, bei  $N$  Gleichungen also  $2N$  Unbekannte. So sind weitere  $N$  Gleichungen erforderlich. Diese können entweder aus Randbedingungen für  $\underline{p}$ ,  $\underline{q}$  oder aus einer Impedanz-Randbedingung gewonnen werden, die das Verhältnis der beiden Größen festlegt. Bei Betrachtung mehrerer Gebiete, die den gesamten oder Teile des Randes gemeinsam haben, wird das Gleichungssystem (2) getrennt für jedes Gebiet aufgestellt. Aus den Koppelbedingungen am gemeinsamen Rand können die restlichen, benötigten Gleichungen gewonnen werden. Für zwei Gebiete 1 und 2 sind das

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_2 \text{ und} \quad (3)$$

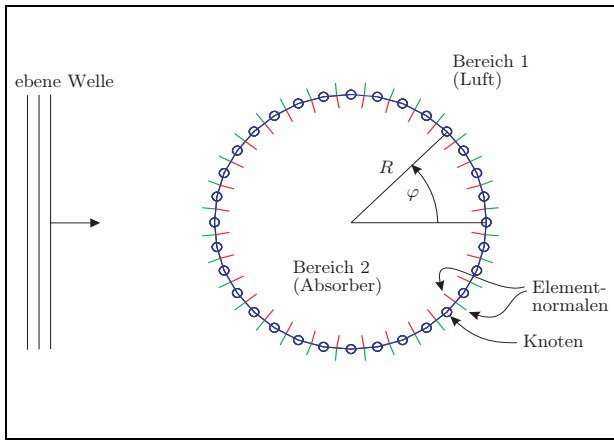
$$\frac{1}{jk_1 \underline{Z}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} \underline{p}_1 = - \frac{1}{jk_2 \underline{Z}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} \underline{p}_2. \quad (4)$$

Für zwei Gebiete, die ihren gesamten Rand miteinander teilen, ergibt sich aus den beiden Gleichungssystem nach (2) nach Substitution mit Hilfe der Koppelbedingungen ein neues Gleichungssystem, das ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte enthält:

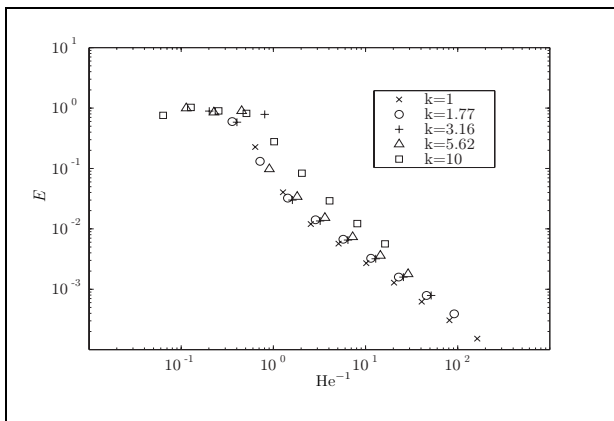
$$\begin{pmatrix} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{C}_1) & -\mathbf{G}_1 \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{C}_2) & \frac{\underline{Z}_2 k_2}{\underline{Z}_1 k_1} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{I1} \\ \mathbf{p}_{I2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

## BEISPIELANWENDUNGEN

Als eine erste einfache Beispielanwendung soll ein Zylinder aus Absorbermaterial dienen, auf den eine ebene Welle  $\underline{p}_I = p_0 e^{-jkx}$  einfällt. Eine analytische Lösung existiert, bei der das resultierende



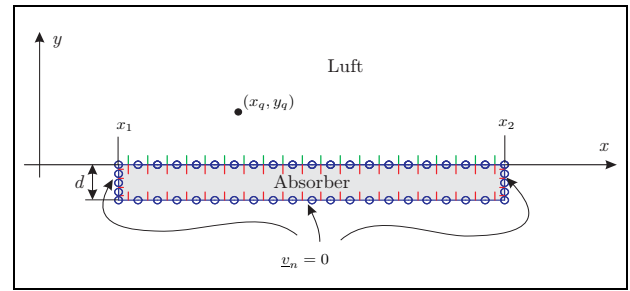
**BILD 1.** Einfall einer ebenen Welle auf einen Absorberzylinder



**BILD 2.** Mittlerer quadratischer Fehler  $E$  in Abhängigkeit von der inversen Helmholtzzahl für verschiedene Wellenzahlen  $k$ .

Schallfeld in eine Reihe von Zylinderfunktionen entwickelt wird [4]. Diese Lösung wird zum Vergleich mit den Ergebnissen des BEM-Modells (Bild 1) verwendet. Das Modell besteht aus zwei Gebieten (Absorber, Luft), deren zugehörige Elemente in Bild 1 gekennzeichnet sind. Folgende dimensionslose Parameter wurden bei der Berechnung verwendet: Radius  $R = 1$ , Wellenzahl in Luft  $k_0 = 1 \dots 10$  und im Absorber  $\underline{k}_a = (1 - j)k_0$ , Kennimpedanzen  $Z_0 = 1$  und  $\underline{Z}_a = (1 - j)Z_0$ . Die verwendeten Knotenzahlen variierten zwischen 16 und 1024. Zur Berechnung wurden lineare Elemente und eine Gauss-Integration 2.Ordnung benutzt. Die Untersuchung des mittleren quadratischen Fehlers an den Knoten

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |p_{\text{BEM}_i} - p_{\text{A}_i}|^2}{\sum_{i=1}^N |p_{\text{A}_i}|^2}} \quad (6)$$



**BILD 3.** Geometrie: eine Zylinderquelle über einem Absorberstreifen

(Bild 2) zeigt, dass die Helmholtzzahl  $He = k \cdot 2\pi/N$  kleiner als 1 sein muss, um einen Fehler kleiner als 10% zu garantieren. Das entspricht etwa 6 Elementen pro Wellenlänge.

Eine weitere Beispielanwendung der Mehrbereichs-BEM für Absorber ist die Schallausbreitung oberhalb eines Streifens einer Schicht aus porösem Material (Bild 3), z.B. die Schallausbreitung über porösen Asphalt. Eine Untersuchung zeigt die Unterschiede zwischen den Ergebnissen eines BEM-Modells mit 2 Bereichen und eines BEM-Modells mit einem Bereich, bei dem die Absorberschicht durch eine lokale Impedanzrandbedingung berücksichtigt wurde.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die beschriebene Randelemente-Methode für Absorber ermöglicht die einfache Integration der Berechnung von porösen Absorbern mit starrem Skelett in numerische akustische Berechnungen. Erste Untersuchungen zur Genauigkeit und zum Rechenaufwand zeigen die praktische Einsetzbarkeit.

## LITERATUR

1. CISKOWSKI, R.D. (Hrsg.) ; BREBBIA, C.A. (Hrsg.): *Boundary Element Methods in Acoustics*. WIT Press, 1991
2. ANFOSSO-LEDEE, F. ; BERENGIER, M.: The prediction of combined effect of road noise barrier and porous road surface by B.E.M. In: *Inter-Noise*, 1996, S. 751–756
3. MECHEL, F.: *Schallabsorber. Innere Strukturen und Schallfelder*. Bd. II. S. Hirzel Verlag, 1995
4. MECHEL, F.: *Schallabsorber. Äußere Schallfelder und Wechselwirkungen*. Bd. I. S. Hirzel Verlag, 1989