Berechnung der Abstrahlung eines Plattenstreifens durch Lösung des gemischten Randwertproblems

R. Volz, M. Möser; Institut für Technische Akustik, Technische Universität Berlin

1. Einleitung

Wird die Abstrahlung eines Plattenstreifens bei bekannter Schnelleverteilung auf der Oberfläche durch Verwendung des Rayleigh'schen Strahlungsintegrals angenähert, so wird im Bereich außerhalb des Streifens die Schnelle zu Null gesetzt („baffled“ Randbedingung). Dabei findet die akustische Kopplung zwischen Vorder- und Rückseite über den Rand des Plattenstreifens keine Berücksichtigung. Diese Kopplung besteht aber gerade bei tiefen Frequenzen im "akustischen Kurzschluss", bei dem nur eine geringe Abstrahlung erfolgt. Daher wird für tiefe Frequenzen eine zu große Schallabstrahlung prognostiziert und besonders die Richtwirkung in der Axialebene der Radscheibe überschätzt.

In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz vorgestellt, der diesen physikalischen Effekt berücksichtigt.

2. Erläuterung des Modells

Bei dünnen Streifen kann aus Symmetriegründen von einem Schalldruck $p = 0$ in der Ebene außerhalb des Plattenstreifens ausgegangen werden. Damit liegt ein gemischtes Randwertproblem vor, bei dem außerhalb des Plattenstreifens der Druck und innerhalb des Streifens die Schnelle vorgegeben ist.

Bild 1 zeigt die Geometrie des Problems.

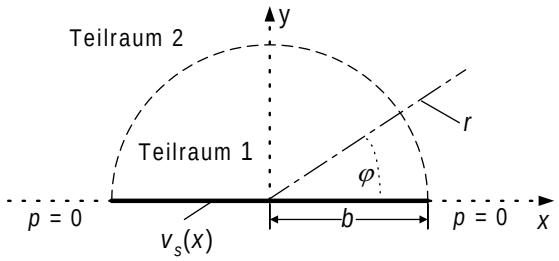

Bild 1 Modell des Plattenstreifens

Es handelt sich um einen unendlich langen dünnen Plattenstreifen der Breite $2b = 1$ m in der x-z-Ebene. Der Schalldruck in der x-z-Ebene wird außerhalb des Plattenstreifens (d.h. $|x| > b$) mit $p = 0$ angenommen. Die Schnelle des Plattenstreifens v_s wird als Modensumme vorgegeben, also

$$v_s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2b}\right). \tag{1}$$

Dieser Ansatz berücksichtigt nur symmetrische Funktionen zur y-Achse und lässt freie und unterstützte Enden am Rand des Plattenstreifens zu. Für die ersten Berechnungen wurde als Anregung nur jeweils eine Mode gewählt. Die modale Schnelleamplitude der Anregemode v_m wurde für alle m mit 1 m/s angenommen.

Betrachtet wird die Abstrahlung in den oberen Halbraum. Zur Lösung des Problems wird der obere Halbraum in zwei Teilräume aufgeteilt: Teilraum 1 sei der Raum innerhalb des Halbkreises, also für $r < b$. Teilraum 2 der Raum außerhalb des Halbkreises ($r > b$).

Aufgrund der zur y-Achse symmetrisch gewählten Schnellefunktionen nimmt man in Teilraum 2 symmetrische fortlaufende Wellen für den Schalldruck an

$$p_2(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left[(2n-1)\varphi\right] \mathrm{H}^{(2)}_{2n-1}(k_0 r), \tag{2}$$

wobei C_n unbekannte zu bestimmende Koeffizienten und $\mathrm{H}^{(2)}$ Hankelfunktionen zweiter Art darstellen.

In Teilraum 1 wird

$$p_1(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2b}\right) \cos(k_m y) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2b}\right) \sin(k_m y). \tag{3}$$

für den Schalldruck angenommen. A_m und B_m sind ebenfalls unbekannte zu bestimmende Koeffizienten.

Die modalen Wellenzahlen k_m ergeben sich dabei aus

$$k_m = \begin{cases} +\sqrt{{k_0}^2 - \left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2}, & {k_0}^2 - \left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2 > 0 \\ -j\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2 - {k_0}^2}, & {k_0}^2 - \left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2 < 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Die unbekannten Koeffizienten B_m lassen sich aus den modalen Schnelleamplituden des Plattenstreifens bestimmen, da für den Schalldruck p_1 in Teilraum 1 nach (3) für $y = 0$

$$v_s(x, y=0) = \frac{j}{\omega\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{j k_m}{\omega\rho} \cos\left(\frac{m\pi x}{2b}\right) \tag{5}$$

gilt. Damit verbleibt

$$p_1(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2b}\right) \cos(k_m y) - j\rho c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_m k_0}{k_m} \cos\left(\frac{m\pi x}{2b}\right) \sin(k_m y). \tag{6}$$

An der Grenzfläche $r = b$ müssen Druck und Schnelle für die beiden Teilräume 1 und 2 übereinstimmen, d.h.

$$p_1(r = b, \varphi) = p_2(r = b, \varphi) \tag{7}$$

und

$$v_1(r = b, \varphi) = v_2(r = b, \varphi). \tag{8}$$

(7) und (8) führen mit (2) und (6) zu einem Gleichungssystem mit den unbekannten Koeffizienten A_m und C_n (mit den Summenobergrenzen *N-1* bzw. *N)*.

Die Fernfeldnäherung führt (2) zu

$$|p_f(r,\varphi)| = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left[(2n-1)\varphi\right] \mathrm{e}^{j\pi(2n-1)/2} \right| \tag{9}$$

(für die Berechnungen wurde $r = 100$ m gewählt) und damit ergibt sich für den Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \cdot \log|p_f| . \quad (10)$$

3. Ergebnisse der Simulationsrechnungen

Die hier gezeigten Richtdiagramme wurden für drei Anregemoden ($m = 0,2,3$ in (1)) ermittelt. Das Gleichungssystem wurde einerseits mit einer gleichen Anzahl von Stützstellen und unbekannten Moden (quadratisches Gleichungssystem) sowie mit dem Vierfachen der Stützstellen gelöst („least squares"). Zusätzlich ist die Fernfeld-Näherung für das Rayleigh-Integral („baffled") zum Vergleich eingetragen. Es wurden zwei Frequenzen ausgewählt.

In einem breiten Bereich von N bei quadratischem Gleichungssystem sowie bei überbestimmtem System treten nahezu identische Ergebnisse in allen gezeigten Fällen auf. Das Rayleigh-Verfahren erzeugt systembedingt den Fehler einer Abstrahlung in x-Richtung (d.h. für $\varphi = 0$) aufgrund der „baffled"-Randbedingung. Beim neuen Verfahren dagegen wird die Dipolwirkung des Plattenstreifens berücksichtigt, so dass keine Abstrahlung in x-Richtung erfolgen kann. Dies macht sich insbesondere bei 250 Hz bemerkbar, da bei dieser tiefen Frequenz das Verhältnis von (halber) Breite des Plattenstreifens zur Luftwellenlänge ($b/\lambda = 0{,}36$) klein ist und daher der Unterschied zur „baffled" Randbedingung beim Rayleigh-Verfahren deutlicher zu Tage tritt (Bilder 2 bis 4). Bei 250 Hz und $m = 2$ und 3 treten auch augenfällige Unterschiede zwischen den beiden Verfahren bei größeren Winkeln auf. Diese sind ebenfalls in den unterschiedlichen Randbedingungen begründet. In diesem Bereich (Verhältnis Biegewellenlänge zu Luftwellenlänge $\lambda_B/\lambda < 1$) findet eine geringe Abstrahlung statt, die durch die unterschiedlichen Randbedingungen der beiden Verfahren zu unterschiedlichen Richtcharakteristiken führt. Bei $m = 2$ führt das beim neuen Verfahren zu einer anders ausgerichteten Hauptkeule (Bild 3) und bei $m = 3$ ($\lambda_B/\lambda = 0{,}48$) zu geringeren Pegeln (Bild 4).

Bei 1000 Hz sind die Unterschiede deutlich geringer. Dies ist verständlich, da einerseits ca. 3 Wellenlängen auf die Breite des Streifens passen ($b/\lambda = 1{,}45$) und damit die Berandung außerhalb des Streifens nur noch eine eingeschränkte Rolle spielt. Andererseits ist das Verhältnis $\lambda_B/\lambda > 1$ was zu einer insgesamt guten Abstrahlung führt (Bilder 5 bis 7). Daher treten bei den beiden Verfahren bei 1000 Hz (wegen der berücksichtigten Dipolwirkung bei dem neuen Verfahren) nur Unterschiede für geringe Winkel auf.

4. Zusammenfassung

Die gezeigten Ergebnisse zeigen für die erste Entwicklungsstufe des neuen Verfahrens (zweidimensionales Modell), dass bei hohen Frequenzen, bei denen das Rayleigh-Integral als geeignetes Vergleichsverfahren herangezogen werden kann, eine sehr gute Übereinstimmung in einem weiten Bereich der Modenanzahl N eintritt. Auch bei tiefen Frequenzen zeigt das Verfahren plausible Ergebnisse und ein stabiles Verhalten gegenüber N. In Zukunft ist der Übergang zu einem dreidimensionalen Modell (Kreisscheibe) geplant.

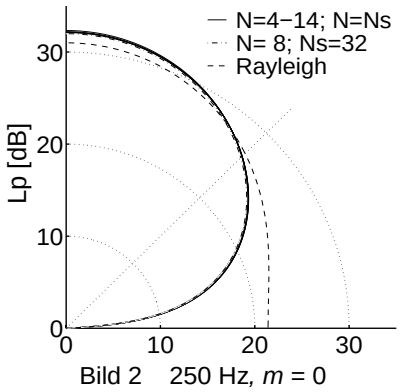

Bild 2 250 Hz, $m = 0$

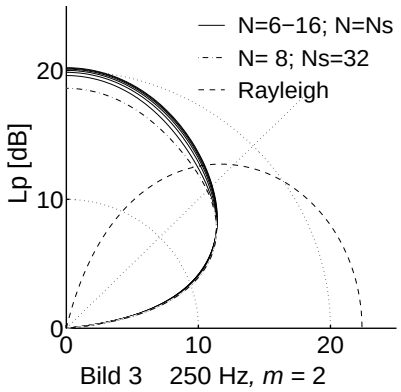

Bild 3 250 Hz, $m = 2$

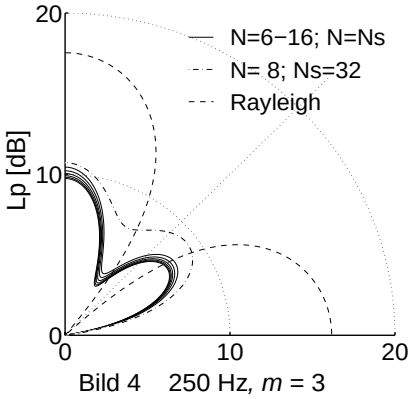

Bild 4 250 Hz, $m = 3$

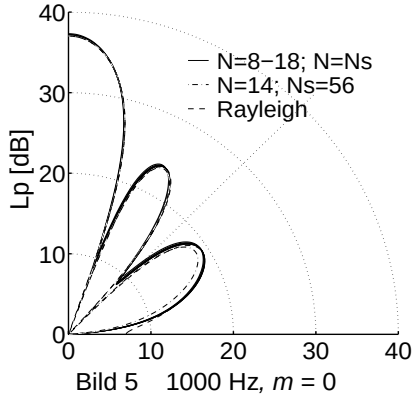

Bild 5 1000 Hz, $m = 0$

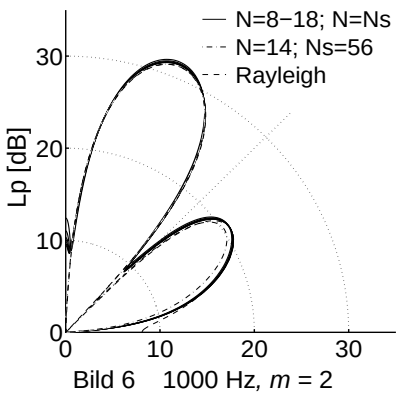

Bild 6 1000 Hz, $m = 2$

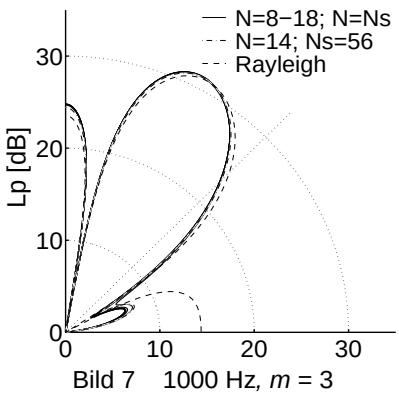

Bild 7 1000 Hz, $m = 3$