Mathematik und akustische Realität

Eckard Blumschein, Magdeburg

blumschein@et.uni-magdeburg.de http://home.arcor.de/eckard.blumschein

Tools wie MATLAB auf einem PC mit Duplex-Soundkarte lassen in der Akustik kaum noch Wünsche offen. Um so deutlicher und ärgerlicher treten Probleme bei der Interpretation der Ergebnisse von Rechnung und Simulation sowie Diskrepanzen gegenüber der Realität hervor. Als „nicht sehr physikalisch“ gelten speziell Entwicklungen in Eigenfunktionen, und sogar die mathematisch in aller Strenge etablierte Fourier-Transformation hat physikalisch gesehen zweifelhafte Aspekte. Als ihre kausale Alternative wird für Echtzeit-Anwendungen die Fourier-Kosinus-Transformation (FCT) empfohlen. Eine tabulos kritische Suche nach den Gründen für notorische Mängel des Spektrogramms führte zur scheinbar trivialen Erkenntnis, dass für jeden physikalischen Prozess ein natürlicher Nullpunkt der verstrichenen Zeit existiert. Aus dem veränderten Standpunkt der Zeitbetrachtung leitet sich eine simple Alternative zur FFT ab. Die Notwendigkeit einer Fensterung entfällt. Ein entsprechendes neues Spektrogramm gestattet hohe Auflösungen von Frequenz und Zeit gleichzeitig. Der sogenannte Unschärfe-Kompromiss wird ohne Wavelets umgangen.

1 „Nicht sehr physikalisch“

So umschreibt Earl Williams [1] eine Modalentwicklung. Fahy [2] erläutert Konsequenzen. Sie betreffen die schlechte Konvergenz sowie Klagen von Studenten über mangelndes Verständnis. Was steckt hinter derartigen Schönheitsfehlern?

Modal berechnet wurde die Greensche Funktion für eine Punktquelle in einem unendlich langen zylindrischen Rohr. Das Ergebnis war überraschend kompakt, wegen Division durch null aber nicht direkt anwendbar. Praktiker wissen mit solchen Tücken umzugehen. Beispielsweise helfen ein realistischeres Modell der Quelle, die Interpretation der Lösung erst nach Rückkehr aus der modalen Ebene zur Realität und numerische Kontrollen.

2 Irreale Transformationen

Alle physikalischen Prozesse sind kausal. Einer Wirkung geht stets ihre Ursache (causa) zeitlich voraus. Wenn also ein Modell eines physikalischen Systems, beispielsweise ein Spektrogramm, schon für Zeitpunkte ein Ausgangssignal zeigt, zu dem noch gar kein Eingangssignal vorlag, dann verhält es sich offensichtlich akausal (nicht kausal). Derartige Fehler können aus der üblichen (komplexen) Fourier-Transformation (FT) resultieren. Der Betrag des von ihr als Abbild einer reellen Funktion der Zeit gelieferten Spektrums ist spiegelbildlich zum Frequenzwert null und somit halb überflüssig. Meist ignoriert man das Phasenspektrum welches abgesehen von seiner Vorzeichenumkehr ebenfalls symmetrisch zu null ist, also auch eine redundante Hälfte hat. Die negative Frequenz ist nicht plausibel und ebenso der Definition der FT geschuldet wie die Nichtrealisierbarkeit bzw. Instabilität von auf ihrer Basis optimierten IIR-Filtern. Die FT hat diese Mängel auch in ihrer Anwendung auf Kugel- oder Zylindersymmetrie. Akausal negativer Zeit entspricht ein ebenso irrealer negativer Radius. Mit drei Dimensionen ist die Ewald-Kugel sogar achtfach redundant.

Es gibt irreale Lösungen - wie die akausale avancierte der Wellengleichung - die lassen sich nur nachträglich ausschließen. Die Probleme der FT sind jedoch teilweise besser von Anfang an vermeidbar als durch nachträgliche Korrekturen wie Sommerfelds konstruierte Kausalität bzw. mittels Kramers-Kronig-Relationen. Ein Schlüssel dazu liegt in der bisher weitgehend ignorierten natürlichen Beschränkung von Zeit und Radius auf positive Werte.

3 Nicht-Negativität von Radius und Zeit

Die Vergangenheit kann bekannt sein, ist aber nicht beeinflussbar. Die Zukunft kann beeinflusst werden, ist aber unbekannt. Nur Fatalisten antizipieren die Welt als vorbestimmtes Schicksal. Sowohl der Radius als auch die verstrichene Zeit haben einen natürlichen Nullpunkt als Grenzwert. Bild 1 stellt die auf lediglich positive Werte beschränkte verstrichene Prozess-Zeit der üblichen Zeit gegenüber, welche willkürlich auf ein Datum bezogen sowie beiderseits unbegrenzt ist und auf der jedes Ereignis E einen festen Platz hat. Dagegen hat die verstrichenen Zeit mit der Gegenwart einen natürlichen Nullpunkt. Von dort wandern alle Ereignisse auf dem immer länger werdenden „Zeitpfeil“ fixiert zum Zeithorizont.

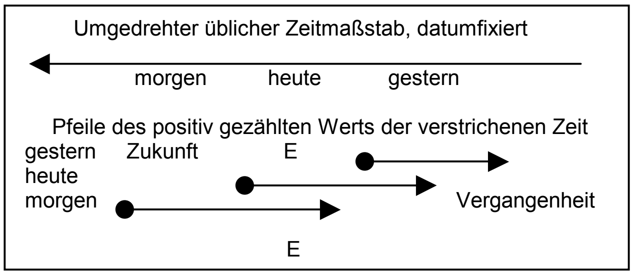


Bild 1 Vergleich zwischen üblicher und natürlicher Zeit

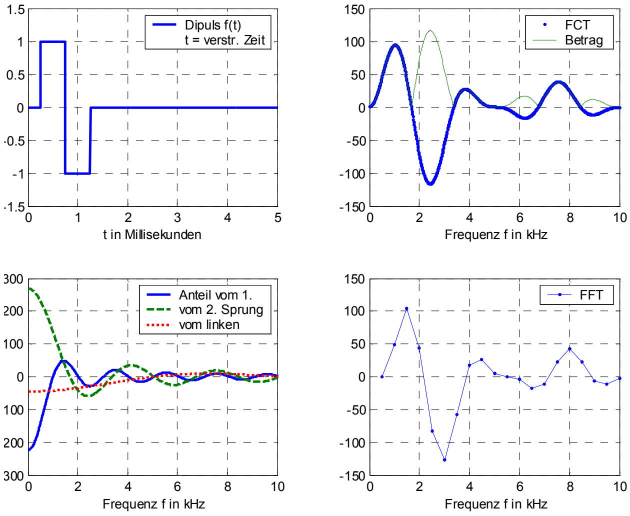
Die komplexe FT ist für beiderseits unbegrenzte Werte definiert und passt sich so an die Beliebigkeit Cartesischer Koordinaten an, deren Ursprung man sich im Unendlichen vorstellen kann. Dies gilt für viele mathematische Strukturen: Winkelfunktionen, Faltungsintegrale, Orthogonalitätsrelationen, Wavelets, etc., und es behindert die Analyse eines Ausschnitts aus der Zeitfunktion zunächst nicht. Hat man allerdings das jeweils aktuelle Spektrum für ein fortlaufend gemessenes Signal zu ermitteln, dann muss ein Zeitfenster so gut wie möglich der fortschreitenden „Cartesischen“ Zeit in kleinen Schritten folgen. Je nach der willkürlich zu wählenden Breite des Fensters und der Überlappung aufeinander folgender Fensterpositionen sind die einzelnen Spektren mehr oder weniger verfälscht. Zweckmäßig setzt man vor der FT das gemessene Signals zu einer geraden Funktion mittels Spiegelung in die Zukunft fort. Man erhält dann das gleiche Spektrum wie bei einer Fourier-Cosinus-Transformation.

4 Fourier-Cosinus-Transformation

Fourier-Cosinus- und Fourier-Sinus-Transformation (FCT, FST) sind die für sich allein kausalen Real- bzw. Imaginärteile der komplexen FT. Wie die ebenfalls kausale Laplace-Transformation (LT) sind sie physikalisch korrekt als einseitige Integrale definiert (von null an). Die FCT hat sich u.a. für MPEG bewährt. Hinter ihr ist die FST ähnlich zweitrangig wie die Neumann- hinter den Bessel-Funktionen. Vorgeschlagen hatte die FCT schon Fourier selbst. Während dessen Gutachter wie Laplace und Lagrange seine Hauptarbeit skeptisch beurteilten fand die FCT zunächst keine Beachtung, und noch kürzlich hat jemand ohne Erwähnung physikalischer Aspekte bezweifelt, dass sie den heutigen Ansprüchen an mathematische Strenge entsprechen würde.

5 Irrelevanz von f(t), f(r) am natürlichen Nullpunkt

Die Mathematik ist als Wissenschaft von den Zahlen entstanden, und so sind wir nicht gewöhnt strikt zwischen Zahlen und Kontinua zu unterscheiden. Daraus für die Physik erwachsende Probleme kann auch ein mathematischer Laie anschaulich überblicken. Stellt man sich ein Kontinuum als unendlich dichte Abfolge einzelner Werte vor, so hat jeder einzelne Wert endlicher Größe für sich allein kein Gewicht. Speziell ist der Wert der Funktion genau an der Stelle Null oder an einer Polstelle physikalisch bedeutungslos. Zwischen Vergangenheit und Zukunft existiert in der Physik kein Zeitraum, ebenso wenig wie Raum zwischen sich berührenden Körpern. Dies macht die Gegenwart zu einem Teil der Vergangenheit. Relevant sind nur Grenzwerte, die man sich wie die Dirac-Delta-Funktion aus dem Kontinuum heraus geformt denken kann und die oftmals bei Annäherung von links und von rechts unterschiedlich sind. Zwischen f(+0) und f(-0) existieren ebenso keine Werte wie zwischen f(+∞) und f(-∞). Fällt die Polstelle einer von zwei orthogonalen Größen auf die Achse einer anderen, so spaltet dies die Achse. Funktionen der verstrichenen Zeit haben nahe dem Ursprung also höchstens einen Grenzwert von rechts bei +0. Aber auch dort hat im Gegensatz zur traditionellen Betrachtung eine Sprungfunktion dauerhaft nichts zu



suchen. Alle Sprünge wandern augenblicklich vom Ursprung weg.

Bild 2 Dipuls-Funktion der Zeit (links oben). Der Ausschnitt aus dem zugehörigen Spektrum (rechts oben) entstand als Summe von Sprungspektren (links unten). Vergleich mit FFT (rechts unten)

6 FCT-Sprungspektrum macht Fensterung unnötig

Da die übliche Zeit keinen natürlichen Nullpunkt hat, ließ sich bisher keine Sprungfunktion definieren deren Integral konvergiert. Erst eine kausalitätsgerechte Definition des Sprungs ermöglicht es, eine beliebige Funktion f(t) durch viele kleine Sprünge anzunähern. Das Spektrum der Treppenfunktion ergibt sich als Summe der FCTs aller Sprünge. Die FCT jedes Sprungs kennt man als FT des Rechteckimpulses. Sie errechnet sich durch Integration vom Ursprung (t = 0) bis zum Sprung (t = T):

$$F(\omega) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{t=0}^{T} \cos(\omega t)\, dt = T\, \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin c(\omega T)$$

Bei jedem positiven Sprung geht die Funktion vom für größere Zeit geltenden Wert Null auf einen bis t = 0 geltenden konstanten Wert hoch. In der herkömmlichen Cartesischen Betrachtung wäre dieser Sprung negativ. Ihn und sein physikalisch nicht reales Spiegelbild fasst man traditionell zu einem Rechteck zusammen. Tatsächlich liegt weder bei t=0 noch am Spiegelpunkt im Negativen ein echter und unabhängiger zweiter Sprung vor. Als ebenso halbreales Konglomerat entpuppt sich die in [3] als Dreieckpuls tri(t/T) bezeichnete Zeitfunktion. Physikalisch real ist wiederum nur ihre rechte Hälfte, also eine Rampe, die bei t = T rückwärts gerichtet mit dem Wert Null beginnt. Ihr Spektrum ist als Quadrat der sinc-Funktion nur positiv. Soll die Rampe dem Integral über die Sprungfunktion gleichen, so muss ihr Endwert bei t = 0 negativ sein. Ein positiver Impuls ist die Ableitung der Sprungfunktion. Zum differenzierten akausalen Rechteck würde ein negativer zweiter Impuls gehören (links in der Zukunft). Wahrscheinlich war man sich dessen nicht bewusst. Man findet oft als Fourier-Transformierte von δ(t) den Wert Eins. Dies ist nur korrekt für T= 0. Allgemein korrespondiert δ(t-T) mit exp(-jωT).

Bild 2 erläutert die Summation am Beispiel eines aus drei Sprüngen (vor 1250, 750 und 250 µs) geformten und dem Haar-Wavelet entsprechenden Dipulses. Jeder Sprung gewinnt mit mehr T an Gewicht. Dies ist zunächst korrekt, bedarf aber für lange zurückliegende Ereignisse einer an die LT angelehnten Korrektur, also der Berücksichtigung der Dämpfung. Die Summe von Sprungspektren stimmt mit dem besten FFT-Spektrum (Bild 3) exzellent überein. Große Abweichungen [3] zwischen FT und DFT deuten also auf Fehler. Zugleich erinnert Bild 3 an das notorische Zeit-Frequenz-Unschärfe-Dilemma [4]. Mit der bisher üblichen FFT würde eine befriedigende Frequenzauflösung ein breites Zeitfenster erfordern. Im Interesse hoher Zeitauflösung muss das Zeitfenster des Spektrogramms jedoch schmal sein. Diese Zweischneidigkeit ist allerdings entgegen [5] kein Naturgesetz. Im Gegenteil, die Natur löst das Problem im Innenohr über eine von Wavelets nachgeahmte Anpassung der Fensterbreite an die Frequenz. Leider sind die Wavelet-Transformationen bisher nicht kausal. Erst die vorgeschlagene Summation von Spektren elementarer Sprünge, Rampen oder Impulse umgeht das Dilemma ohne Kompromiss, indem es gar keine Fensterung mehr braucht

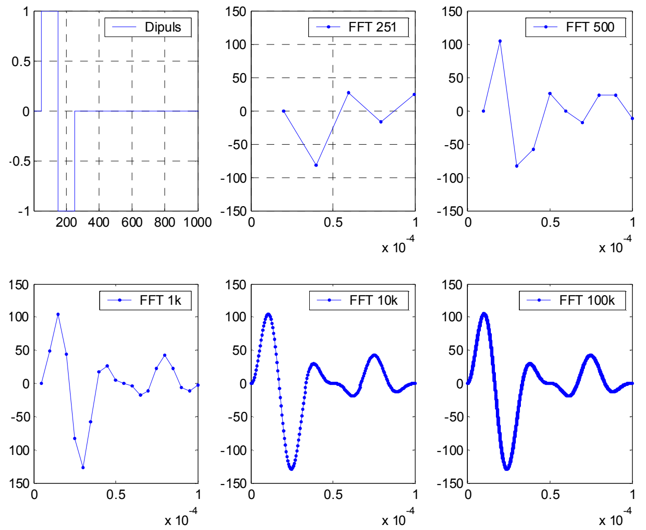


Bild 3 Dipuls (oben links) und zugehörige MATLAB-FFT bei Variation der Fensterbreite

7 Praktische Konsequenzen

Die FCT ist gegenüber der komplexen FT bei der Analyse eines Einzelsignals ohne zu berücksichtigende Phasenbeziehungen zu anderen Signalen vor allem deshalb im Vorteil, weil ihre Definition Kausalität garantiert. Dies schließt Fehler aus, die sich mit der FT bei Missachtung der Phase ergeben könnten. Man rechnet mit der FCT rein reell sowie ohne negative Frequenzen bzw. Wellenzahlen, und man darf sich dem Ursprung beliebig nähern ohne dass es zu Ungenauigkeiten kommt. Fensterungen sind dazu nicht mehr erforderlich. Letzteres setzt freilich voraus, dass man sich vom bisher selbstverständlichen Standpunkt einer universell gültigen Zeit löst und als einzig natürlichen Nullpunkt der Zeit die signalbezogene Gegenwart wählt. Wie beim real-time-Spektrogramm hat man diese ständig im Blick, und die ferne Vergangenheit verschwindet am Horizont. Es wird erwartet, dass neue Spektrogramme [6], welche auf der Addition von Sprung-Spektren basieren, endlich zwei alte Wünsche erfüllen: Völlige Plausibilität infolge Kausalität sowie eine Auflösung (Frequenz mal Zeit) welche der des Innenohrs nicht nachsteht.

Literatur

[1] E. Williams: Fourier Acoustics. New York: Acad. Press 1999.
[2] F. Fahy: Foundation of Engineering Acoustics: San Diego: Academic Press 2000.
[3] Ch. Phillips, J. Parr, E. Riskin: Signals, Systems, and Transforms. 3rd ed. Upper Saddle River: Pearson Education 2003.
[4] J.W. Pitton, K.Wang, B.-H. Juang: Time Frequency Analysis and Auditory Modeling for Automatic Recognition of Speech. *Proc. IEEE* **84** (1996) 1199-1213.
[5] U. Karrenberg: Signale-Prozesse-Systeme. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verl. 2002.
[6] E. Blumschein: Neues zu Hörphänomenen und –mechanismen. Aachen: DAGA 2003.