

# Die akustische Kopplung von Resonatorbechern an Aufschlagzungen

Sebastian Schmidt und Jonas Braasch  
Institut für Kommunikationsakustik, Ruhr-Universität Bochum

## Kurzfassung

Bei der Simulation von Aufschlagzungenorgelpfeifen wird von einem nichtlinearen Oszillator und einem linearen Resonator ausgegangen. Aufgrund der Nichtlinearität scheiden Frequenzbereichsmodelle zur Untersuchung der physikalischen Vorgänge aus; dies betrifft aufgrund der veränderlichen Oszillatorreflektanz auch den Resonator. Mit Hilfe von fluidmechanischen Gleichungen und einer modifizierten Schwingungs-Differentialgleichung wurde der Oszillatorteil im Zeitbereich brauchbar nachgebildet; auch beim Resonator besitzt man mit Digitalen Wellenleitern eine leistungsfähige Implementierungsmöglichkeit. Kompliziertere Resonatorstrukturen werden durch ein Scheibenmodell approximiert. Im hier vorgestellten Projekt wurde untersucht, wie beide Teilmodelle geeignet gekoppelt werden können, um zu einer besseren Anschauung der physikalischen Vorgänge zu gelangen.

## 1. Einleitung

Um eine Analyse der Interaktion linearer Resonatoren mit nichtlinearen Oszillatoren durchführen zu können, wurde ein Modell entwickelt, das einerseits die fluiddynamischen und mechanischen Vorgänge einer Aufschlagzunge simuliert, andererseits ein flexibles Resonatormodell beinhaltet. Im folgenden sollen drei Aspekte des Modells erörtert werden. Zunächst wird die Umwandlung der Resonatorbecher in ein Scheibenmodell betrachtet. Im zweiten Teil wird ein physikalisches Modell zur Simulation von Aufschlagschwingungen beschrieben. Als drittes Element wird erläutert, wie die zur Kopplungssimulation nötigen zeitvarianten Reflektanzen realisiert werden können und wie die konkrete Kopplung von Oszillator und Resonator implementiert wird.

## 2. Scheibenmodelle komplexer Resonatorstrukturen

Im Mittelpunkt stehen die Regalregister der Orgel. Dabei handelt es sich um Zungenpfeifen mit relativ kurzen Bechern, welche durch ihre Form den Pfeifenklang charakteristisch beeinflussen. Um eine Referenzmessung durchführen zu können, wurden vier Becher aus Pfeifenzinn hergestellt (Abb. 1). Dazu wurden die Register Bärpfeife (1), Rohr-Doppelkegelregal (2), Vox Humana (3) und Doppelkegelregal (4) ausgewählt. Die akustischen Übertragungsfunktionen wurden mit einem Zweikanalverfahren gemessen. Zur Bechermodellierung wurden die Maße der Resonatoren ermittelt und als Waveguide-Modell implementiert [4]. Da Systeme aus zusammengesetzten konvergent und divergent konischen Strukturen in einer digitalen Simulation instabil werden können, wurde ein Scheibenmodell eingesetzt. Hierzu fand eine Zerlegung der Bechergeometrie in Zylindersegmente statt. Die Grenzpunkte wurden so gewählt, daß Becherlänge und Scheibendicke in ganzzahligem Verhältnis standen. Dies ergab Scheibenmodelle mit 35 bis 51 Segmenten. Weiterhin wurde an die geometrischen Daten eines jeden Resonators eine Mündungskorrektur von 60% des jeweiligen Endradius' berücksichtigt. Die Frequenzabhängigkeit dieser Mündungskorrektur wurde durch den Phasengang des Reflektanzfilters am Resonatorende in geeigneter Weise simuliert. Die zum Filterentwurf benötigte Abstrahlimpedanz wurde nach der Methode von Levine und Schwinger abgeschätzt (vgl. [2], [3]). So ergab sich aus den Modellen eine für das weitere Vorgehen gut verwendbare Bechersimulation. Ein Digitaler Wellenleiter ist für die Beschreibung von Zeitbereichsvorgängen vorteilhaft geeignet, denn zu jedem Zeitpunkt stehen die numerischen Werte aller benötigten Größen zur Verfügung. Hinsichtlich Dispersion und Dissipation kann man das Modell anpassen (vgl. hierzu [4]).

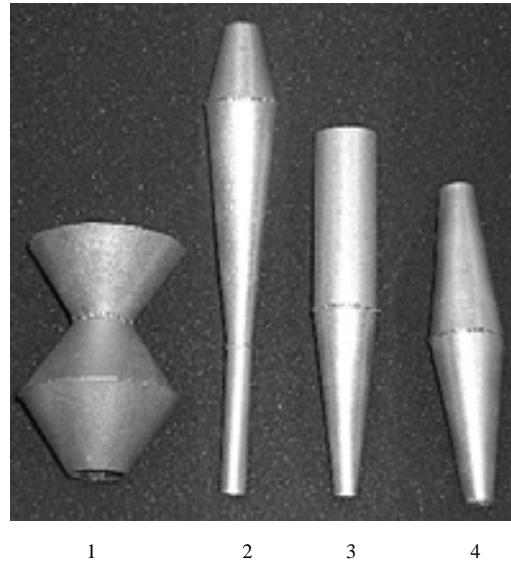


Abb. 1: Becher zur Referenzmessung.

## 3. Ein physikalisches Modell zur Simulation von Aufschlagschwingungen

Neben den in der Literatur (vgl. z.B. [1]) beschriebenen fluiddynamischen Gleichungen, welche die Interaktion zwischen den akustischen Größen und der Zungenauslenkung beschreiben, wurde eine physikalische Simulation des Zungenoszillators implementiert. Oftmals wird der Aufschlag durch eine Betragsbildung der Zungenposition nachgebildet; Ziel des hier benutzten Verfahrens ist jedoch eine größere Realitätstreue und eine gezielte Steuerbarkeit des Zungenverhaltens. Die Bewegungsgleichung für die ungestörte Zunge ergibt sich zu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{w_r}{m_r} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{m_r n_r}(x) = -\frac{F(t)}{m_r} \quad (1)$$

mit  $x = 0$  als Ruhelage der Zunge. Die Größen  $m_r$ ,  $n_r$  und  $w_r$  beschreiben die effektiven Werte von Masse, Nachgiebigkeit und Dämpfung. Da die zu untersuchenden Oszillatoren durch auf eine Begrenzung aufschlagende Massen dargestellt werden, muß die Bewegungsgleichung modifiziert werden. Im Augenblick  $t_0$  soll ein ideal elastischer Stoß auf ein ruhendes Hindernis an einer Stelle  $-x_0$  unterhalb von  $x = 0$  simuliert werden. Dieser Vorgang kann auch als Aktualisierung der Oszillatoranfangsbedingungen interpretiert werden. Für einen Zeitpunkt  $k_0$  mit  $x(k_0) \leq -x_0$  finde ein Aufschlag statt. Dazu wird die Schnelle  $v_0 = v(k_0 - 1)$  vor dem Aufschlag berechnet. Dieser Wert stellt mit der Festlegung  $x(k_0) = -x_0$  und  $v(k_0) = -v_0$  die neuen Randbedingungen dar. Man erhält als aktualisierte Anfangsbedingung nach dem Aufschlag

$$x(k - 1) = -x_0 \quad (2)$$

$$x(k - 2) = -x_0 + v_0 T_A \quad (3)$$

Der Oszillator schwingt ab dem Abtastzeitpunkt  $k_0$  in der beabsichtigten Weise weiter.

## 4. Kopplung zwischen Oszillator und Resonator

Die Simulation der Kopplung von Zunge und Becher ist mit den gegebenen Modellen (inklusive fluiddynamischer Beziehungen) durchführbar. Die Beziehung zwischen dem Druck  $p$  und dem akustischen

Volumenfluß  $q$  im Kanal hinter der Zunge bei Ausbreitung ebener Wellen kann mit der örtlichen Impedanz  $Z_0$  und der Resonatorantwort  $r(t)$  mit

$$p(t) = Z_0 q(t) + r(t) * (Z_0 q(t) + p(t)) \quad (4)$$

angegeben werden. Die nötige Signalverarbeitung leistet ein Digitaler Wellenleiter, womit der Einfluß des Resonators auf den Oszillator implementiert ist. Der zweite Aspekt der Interaktion zwischen den Komponenten betrifft den Einfluß der Zungenposition auf die Abschlußreflektanz  $R$  des Resonators. Für einen kompletten Verschuß des Kanals unter der Zunge kann diese direkt zu  $R = 1$  angegeben werden. Für einen geöffneten Abschluß wird die Reflektanz kleinere Werte annehmen. Sie kann unter Verwendung eines statischen Impedanzwertes der Zungenöffnung berechnet werden. Eine formale Beschreibung für eine feste Zungenposition  $x_f$  erhält man nach der Definition durch  $Z(p_\Delta) = p_\Delta/q$ . Dabei entspricht der Druck  $p_\Delta$  der Druckdifferenz zwischen den Zonen vor und hinter der Zunge und die Größe  $q$  dem akustischen Fluß durch die Öffnung. Über die Kombination einer modifizierten Zungenbewegungsgleichung nach dem Hookeschen Gesetz ( $x_f = x_0 - W \cdot L \cdot p_\Delta \cdot n$ ) mit der Bernoulligleichung kann der statische Fluß für einen gegebenen Differenzdruck kalkuliert werden (vgl. [3]). Die formale Beschreibung der druckabhängigen Oszillatorreflektanz ergibt sich zu

$$R = \frac{Z(p_\Delta) - Z_0}{Z(p_\Delta) + Z_0} = \frac{p_\Delta/q - Z_0}{p_\Delta/q + Z_0} \quad (5)$$

Dieser Wert kann numerisch instabil werden, da  $Z(p_\Delta)$  für die vollständig geschlossene Zunge gegen unendlich strebt. Eine vorsichtiger Schätzung der Reflektanz gelingt direkt mit  $R(A(t)) = (A_K - A(t))/(A_K + A(t))$  (zeitabhängige Spaltfläche  $A(t)$ , Kanalfäche  $A_K$ ).

## 5. Ergebnisse

Die Simulation der Resonatoren zeigte in den wesentlichen Frequenzbereichen sehr gute Ergebnisse. In Abb. 2 sind die gemessenen Übertragungsfunktionen den simulierten gegenübergestellt.

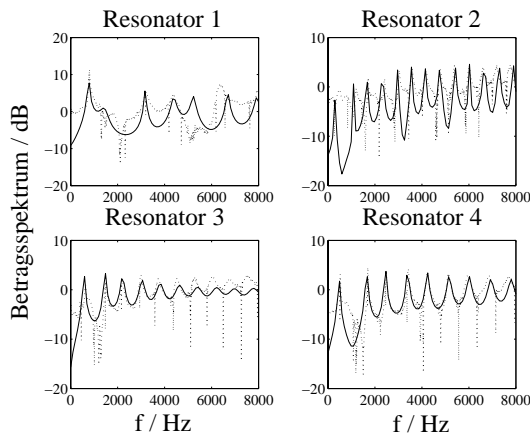


Abb. 2: Ergebnisse der Resonatorsimulation im Frequenzbereich (gestrichelt: gemessene Übertragungsfunktionen).

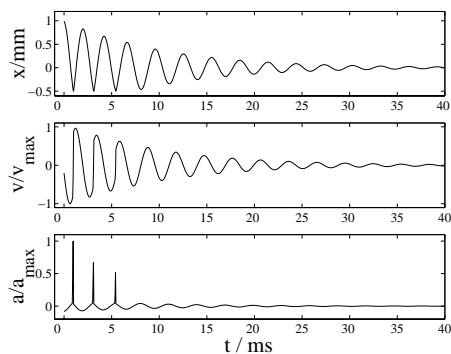


Abb. 3: Ergebnisse einer Beispielzungenimulation; oben: Auslenkung  $x(t)$ , Mitte: Schnelle  $v(t)$ , unten: Beschleunigung  $a(t)$ .

Die Bewegung der Zunge wird durch die digitale Aufschlagsimulation sehr realitätsnah nachgebildet. Abb. 3 zeigt ein Beispiel mit den Zeitverläufen der Größen  $x(k)$ ,  $v(k)$  und  $a(k)$ . Nach einigen Aufschlägen schwingt das Modell aus. Die Gesamtsimulation liefert die Werte der Zungengrößen Position, Fluß, Druck und Kraft. Diese sind, zusammen mit dem statischen Druck  $p_0$ , in Abb. 4 dargestellt.

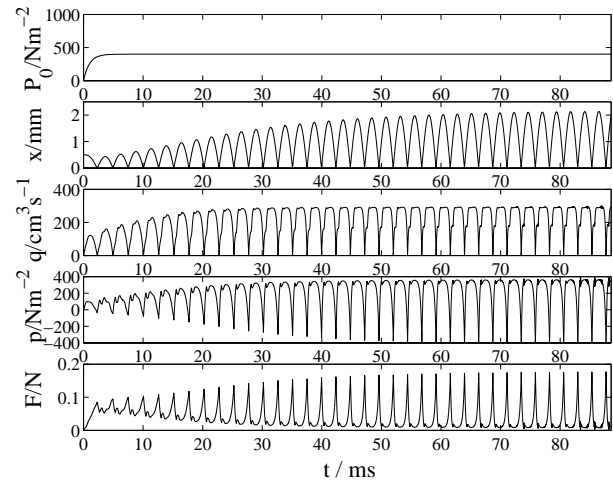


Abb. 4: Ausgangsgrößen der Simulation.

Schließlich ist in Abb. 5 der gemessene Ausgangsdruckverlauf für alle Becher dem simulierten Druck gegenübergestellt.

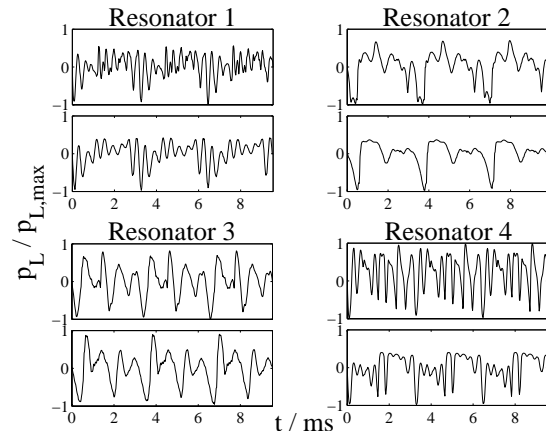


Abb. 5: Normierte Ausgangsdrücke der Gesamtsimulation im Zeitbereich; jeweils oben ist die simulierte und unten die gemessene Kurve dargestellt.

Wir danken der Orgelbauwerkstatt Klais in Bonn für die freundliche Unterstützung bei der Erstellung der Modellresonatoren.

## Literatur

- [1] Hirschberg, A., van de Laar, R. W. A., Marrou-Maurières, J. P., Wijnands, A.P.J et al. (1990): *A quasi-stationary model of air flow in the reed channel of single-reed woodwind instruments*, Acustica 70, 146-154
- [2] Levine, H., Schwinger, J. (1948): *On the radiation of sound from an unflanged circular pipe*, Phys. Rev. 73, 383-406
- [3] Scavone, G. P. (1997): *An acoustic analysis of single-reed woodwind instruments with an emphasis on design and performance issues and digital waveguide modeling techniques*, PhD thesis, CCRMA, Music Dept., Stanford University
- [4] Smith, J. O. (1998): *Principles of digital waveguide models of musical instruments*, in Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics, M. Kahrs and K. Brandenburg, Eds., 417-466, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London