Verwendung der zeitlichen Rücktransformation zur Berücksichtigung der Kausalität in Spektren mehrdimensionaler Fourier Transformationen

Holger Waubke, Peter Balazs
Institut für Schallforschung, Österreichische Akademie der Wissenschaften; Email: holger.waubke@oeaw.ac.at

Einleitung

Die Fourier Transformation wird häufig nur für stationäre Signale verwendet. Es wird hier ein einheitliches Verfahren vorgestellt, dass es erlaubt in einfacher Weise die Kausalität zu berücksichtigen. Der klassische Weg zur Erfüllung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung bei Greenschen Funktionen ist der Übergang auf die Laplace Transformation unter zu Hilfenahme der Somigliana Identität. Die Anwendung der Theorie der verallgemeinerten Funktionen erlaubt es durch geeignete Rekombination der homogenen und partikulären Lösung die Kausalität zu erfüllen. Die vorgestellte Methode lässt sich durch Verwendung der Hilbert Transformation formalisiert beschreiben. Im transformierten Raum lässt sich die Kausalitätsbedingung in einfacher Weise erfüllen und durch zeitliche Rücktransformation lassen die Koeffizienten bestimmen. Die Methodik ist sehr variabel und kann auch verwendet werden, um die Wellenausbreitung in geschichteten orthotropen Medien zu berechnen.

Orthotropie in Böden

In Böden ist durch die Lagerung häufig ein unterschiedliches Verhalten in horizontaler und vertikaler Richtung zu beobachten. Für die Materialparameter in den horizontalen Richtungen x und y wird einheitlich der Index x und in der vertikaler Richtung z der Index z in eq. 3 und eq. 4 verwendet. Das partielle Differentialgleichungssystem für die partikuläre Lösung liefert eine Abhängigkeit der Komponenten der Verschiebung $\mathbf{u}$ von den Komponenten der Volumenkraft $\mathbf{b}$. Für die Bestimmung der homogenen Lösungen wird die Belastung $\mathbf{b}$ zu Null gesetzt und es sind die singulären Stellen des Gleichungssystems zu bestimmen. Zusätzlich werden Gleichungen benötigt, um aus den Verformungen $\mathbf{u}$ zunächst die Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und anschließend unter Verwendung der Inversen der Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F}$ die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ bestimmen zu können. Die orthotrope Formulierung lässt eine Trennung der Wellen in Kompressions- und Scherwellen mittels a priori bekannter Helmholtz Potentiale nicht zu.

Fourier Transformation

Wendet man die Fourier Transformation auf die Koordinaten des Raumes x, y, z und die Zeit t an, so werden die Ableitungen zu Faktoren, die von der imaginären Einheit j den Wellenzahlen k_x, k_y, k_z und der Winkelfrequenz ω abhängen. Der Übergang auf ein gewöhnliches Matrixproblem ist in eq. 3 und eq. 4 wiedergeben. Die partikuläre Lösung ergibt sich, wenn man die Matrix in eq. 3 invertiert. Die homogene Lösung, indem man die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix in eq. 3 bestimmt. Die Eigenvektoren sind die gesuchten Helmholtz Potentiale im transformierten Raum. Aus den Eigenvektoren Ψ_i und den zugehörigen Eigenwerten lässt sich die homogene Lösung bestimmen. Hierfür wird zunächst jene Komponente festegelegt, nach der die Determinante der Matrix aufgelöst werden soll. Bei Annahme einer horizontalen Schichtung ist es sinnvoll nach der vertikalen Wellenzahl $k_{z,i}$ aufzulösen. Für die Bestimmung der kausalen Lösung infolge einer Dirac Belastung zur Bestimmung der Greenschen Funktion ist es dienlich direkt die Eigenkreisfrequenz ω_i als explizit gegebene Größe zu verwenden. Unabhängig von der gewählten Größe hat man es mit einer Polynomgleichung des sechsten Grades zu tun, da die Matrix die Dimension Drei hat und die zweiten Ableitungen quadratische Terme liefern. Auf Basis der Quadrate der gesuchten Größen reduziert sich das Problem auf den Polynomgrad Drei. Somit entstehen drei quadratische Lösungen mit jeweils zwei Eigenwerten, die sich aus der positiven und der negativen Wurzel ergeben.

Homogene Lösung

Die homogene Lösung im transformierten Raum wird bestimmt, indem man den Eigenvektoren die Differenz des Eigenvektors von der Basisgröße als Dirac Funktion zuordnet. Dieses Verfahren generiert eine Funktion, welche nur an den Stellen von Null abweicht, an denen die Matrix singulär wird und somit eine nichttriviale homogene Lösung existiert. Hat man das Gleichungssystem in Abhängigkeit von der vertikalen Wellenzahl k_z gebracht, so kann man die homogene Gleichung, wie in eq. 5 beschriebenen, angeben. Dabei sind die Eigenvektoren der positiven Wurzeln der quadratischen Nullstellen des Polynoms mit einem + als Index und die negativen mit einem – als Index gekennzeichnet. Die Skalierung ist unbekannt und wird mit A_i bzw. B_i variabel eingeführt.

Aus der homogenen Lösung der Verformung lassen sich mittels der Beziehung zwischen Verformungen und Spannungen (eq. 4) auch die zugehörigen Spannungen ableiten.

Rücktransformation der vertikalen Koordinate

Will man die Wellenausbreitung in horizontal geschichteten Böden untersuchen, so bietet sich eine Rücktransformation über der vertikalen Koordinate an. Aus diesem Grund war es sinnvoll das Polynom in Abhängigkeit von der vertikalen Wellenzahl zu lösen. Es ist bei der Rücktransformation nur erforderlich, die Dirac Funktion zu behandeln. Die Rücktransformation der homogenen Lösung liefert dabei komplexe Exponentialfunktionen (eq. 6), die von der Eigen-Wellenzahlen $k_{,zi}$ und der Tiefe z abhängen. Die Bestimmung der unbekannten Skalierungen erfordert es die Exponentialfunktionen an den Schichtgrenzen auszuwerten und daraus Spannungen und Verformungen an der Schichtgrenze zu bestimmen.

Abstrahlbedingung und Schichtmodell

Die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung als uneigentliche Randbedingung wird an dieser Stelle als einziger verbliebener Problemfall weiterverfolgt. Die Bestimmung welche Lösung abstrahlt, wird mittels der zeitlichen Rücktransformation bestimmt. Ausgehend von der Annahme, dass man es mit einer monofrequenten Anregung zu tun hat, kann man zusätzlich zur Dirac Funktion der Differenz des Eigenwertes $k_{z,i}$ und der Wellenzahl k_z eine weitere der Differenz der Winkelfrequenz ω und der Winkelfrequenz der Anregung Ω bilden. Die Rücktransformation über die Tiefe z und die Zeit t liefert komplexe Exponentialfunktionen in Abhängigkeit der Summe der Produkte aus Eigenwerten $k_{z,i}$ mit der Tiefe z und der Winkelfrequenz Ω mit der Zeit t. Die Abstrahlbedingung lässt sich entweder mit der positiven oder negativen Lösung jeder quadratischen Nullstelle erfüllen. Ausgehend von der Annahme das nur Quellen in den oberen Schichten vorhanden sind , hat man jene Lösung zu wählen, die für eine beliebige Wellenfront, zu der ein konstanter Imaginärteil des Exponenten gehört, die Tiefe z mit der Zeit t zunimmt. Sinnvollerweise setzt man den Imaginärteil des Exponenten für die Bestimmung zu Null.

Abstrahlbedingung und Greensche Funktion

Für die Herleitung der Greenschen Funktion, welche die Basis der Strahlverfolgungs- und Randelemente Methoden bildet, muss man sowohl die partikuläre Lösung für die Testfunktion: den Einheitsimpuls, als auch die homogene Lösung, die zuvor in Abhängigkeit der Winkelfrequenz ω aufgestellt wurde, getrennt zurück transformieren. Die partikuläre Lösung liefert wegen der Symmetrie eine zeitabhängige Signum Funktion, welche die Kausalitätsbedingung verletzt. Die homogene Lösung ist vom gleichen Typ jedoch ohne die Signumfunktion und besitzt eine variable Skalierung. Durch Überlagerung von partikulärer und homogener Lösung bei geeigneter Wahl der Skalierung ist es möglich die Signum Funktion in eine Heaviside Funktion zu überführen, wodurch die Kausalität erfüllt wird. Im Fortlauf wird die partikuläre Lösung und die homogene Lösung mit der festgelegten Skalierung getrennt weiterverfolgt. Die Gleichungen sind vom gleichen Typ. Die Singularitäten der homogenen Lösung basieren auf der Dirac Funktion $\delta(\omega_i)$ und jene der partikulären Lösung auf $1/\omega_i$.

Rücktransformation aller Ostskoordinaten

Die Rücktransformation über die Koordinaten des Raumes ermöglicht es Greensche Funktionen für jede Frequenz im Ortsraum zu bestimmen. Im Falle der isotropen Materials lassen sich die Gleichungen als Ableitung der Monopollösung beschreiben, welche eine polare Symmetrie aufweist, weshalb man auf die Wellenzahl k_r übergeht. Dazu werden alle verbliebenen Abhängigkeiten von jk_x, jk_y, jk_z nach der Substitution mit (eq. 1)

$$k_r = +\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \qquad \text{eq. 1}$$

vor die Rücktransformation gezogen, was Ableitungen nach x, y bzw. z erfordert. Die zu Suche rotationssymmetrische Grundlösung ist die Lösung für den Monopol.

Im isotropen Fall kann man die Gleichungen direkt lösen, wenn man eine neue Definition der komplexen Cosinus Integralis [1] Funktion einführt, welche die Hermiteschen Bedingungen der Fourier Transformation erfüllt (eq. 2). Es handelt sich bei der Cosinus Integralis Distribution um einen Branch, und es wurde der problemspezifische Cut zu bestimmt, der nicht mit den speziellen Lösungen in der Literatur[2,3] übereinstimmt.

$$\tilde{C}i(z) = \tilde{C}i(-z) = \gamma + \ln(z) + \int_0^z \frac{\cos(t-1)}{t}\,dt \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{2} \qquad \text{eq. 2}$$

Bei Orthotropie ergibt sich elliptische Beziehung bei der Bestimmung von k_r. Eine Lösung des Problems auf die selbe Weise wurde bis jetzt nicht durchgeführt.

Anwendungsgebiet

Die Lösung für einen geschichteten Halbraum mit orthotropen Material im Wellenzahlraum ermöglicht es Berechungen der Erschütterungsausbreitung in Böden über große Distanzen realitätsnäher als bei Annahme isoropen Verhaltens durchzuführen. Die Verwendung des globalen Fourier Ansatzes erlaubt es darüber hinaus die Berechung mit mäßigen Aufwand über viele Wellenlängen zu erstrecken.

$$\begin{bmatrix} \frac{(E_z-\nu_{zx}^2E_x)E_xk_x^2}{(\nu_{xy}^2-1)E_z+(1+2\nu_{xy})\nu_{zx}^2E_x}-G_{xy}k_y^2-G_{zx}k_z^2+\rho\Omega^2 & \frac{(\nu_{xy}E_z-\nu_{zx}^2E_x)E_xk_xk_y}{(\nu_{xy}^2-1)E_z+(1+2\nu_{xy})\nu_{zx}^2E_x}-G_{xy}k_xk_y & \frac{\nu_{zx}E_zE_xk_xk_z}{(\nu_{xy}-1)E_z+2\nu_{zx}^2E_x}-G_{zx}k_xk_z \\ \frac{(\nu_{xy}E_z-\nu_{zx}^2E_x)E_xk_xk_y}{(\nu_{xy}^2-1)E_z+(1+2\nu_{xy})\nu_{zx}^2E_x}-G_{xy}k_xk_y & \frac{(E_z-\nu_{zx}^2E_x)E_xk_y^2}{(\nu_{xy}^2-1)E_z+(1+2\nu_{xy})\nu_{zx}^2E_x}-G_{xy}k_x^2-G_{zx}k_z^2+\rho\Omega^2 & \frac{\nu_{zx}E_zE_xk_yk_z}{(\nu_{xy}-1)E_z+2\nu_{zx}^2E_x}-G_{zx}k_yk_z \\ \frac{\nu_{zx}E_zE_xk_xk_z}{(\nu_{xy}-1)E_z+2\nu_{zx}^2E_x}-G_{zx}k_xk_z & \frac{\nu_{zx}E_zE_xk_yk_z}{(\nu_{xy}-1)E_z+2\nu_{zx}^2E_x}-G_{zx}k_yk_z & \frac{(\nu_{zx}-1)E_z^2k_z^2}{(\nu_{xy}-1)E_z+2\nu_{zx}^2E_x}-G_{zx}(k_x^2+k_y^2)+\rho\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\hat{u}_x\\ \hat{u}_y\\ \hat{u}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\hat{b}_x\\ -\hat{b}_y\\ -\hat{b}_z\end{bmatrix} \qquad \text{eq. 3}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{-1}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\ ,\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_x & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zx}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{zx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{xy} \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_z \\ jk_y/2 & jk_x/2 & 0 \\ 0 & jk_z/2 & jk_y/2 \\ jk_z/2 & 0 & jk_x/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\hat{u}_x\\ \hat{u}_y\\ \hat{u}_z\end{bmatrix} \qquad \text{eq. 4}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(k_x,k_y,k_z,\omega) &= \sum_{i=1}^{3}\left[A_i\boldsymbol{\psi}_{+i}(k_x,k_y,\omega)\,\delta(k_z-k_{z,i}) + B_i\boldsymbol{\psi}_{-i}(k_x,k_y,\omega)\,\delta(k_z+k_{z,i})\right] \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k_x,k_y,k_z,\omega) &= \sum_{i=1}^{3}\left[\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}A_i\boldsymbol{\psi}_{+i}(k_x,k_y,\omega)\,\delta(k_z-k_{z,i}) + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}B_i\boldsymbol{\psi}_{-i}(k_x,k_y,\omega)\,\delta(k_z+k_{z,i})\right] \end{aligned} \qquad \text{eq. 5}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(k_x,k_y,z,\omega) &= \sum_{i=1}^{3}\left[A_i\boldsymbol{\psi}_{+i}(k_x,k_y,\omega)\,e^{jk_{z,i}z} + B_i\boldsymbol{\psi}_{-i}(k_x,k_y,\omega)\,e^{-jk_{z,i}z}\right] \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k_x,k_y,z,\omega) &= \sum_{i=1}^{3}\left[\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}A_i\boldsymbol{\psi}_{+i}(k_x,k_y,\omega)\,e^{jk_{z,i}z} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}B_i\boldsymbol{\psi}_{-i}(k_x,k_y,\omega)\,e^{-jk_{z,i}z}\right] \end{aligned} \qquad \text{eq. 6}$$

[1] H. Waubke: Dynamische Berechnungen für den Halbraum mit streuenden Parametern mittels orthogonaler Polynome, Dissertation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München 2/96

[2] M. Abramowitz, I.A. Stegun.: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York 1965

[3] Maple 8, Waterloo Maple Inc., © 1981-2002