Randintegral-Methode für hohe Frequenzen

E. Sarradj
Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH und Institut für Akustik und Sprachkommunikation, Technische Universität Dresden; Email: ennes.sarradj@akustikforschung.de

Einleitung

Herkömmliche deterministische numerische Methoden wie klassischen Finite-Elemente- oder Boundary-Elemente-Methoden kommen für die Berechnung bei hohen Frequenzen nicht zuletzt wegen des sehr hohen Berechnungsaufwandes nicht in Frage. Die für solche Probleme eingeführte Methode der Statistischen Energieanalyse (SEA) liefert jedoch in vielen Fällen zu wenig differenzierte Ergebnisse und lässt sich nicht immer optimal anwenden. Verschiedene alternative bzw. ergänzende Verfahren sind bereits vorgeschlagen worden. In diesem Beitrag soll eines davon vorgestellt werden. Die Methode, die ursprünglich von Le Bot [1] entwickelt wurde, ist eine Randintegral-Methode, die mit Energiegrößen arbeitet. Sie lässt sich auf ein-, zwei- und dreidimensionale Probleme anwenden.

Überblick über die Theorie

Den Ausgangspunkt bildet das Prinzip der Energieerhaltung. Während es in der SEA auf ein ganzes Subsystem angewendet wird, soll hier ein infinitesimal kleines Volumen betrachtet werden. Die Energie W kann sich nur ändern durch: 1. Verlust von Energie innerhalb des Volumens (durch Dissipation), 2. Einspeisung von Energie innerhalb des Volumens (durch eine Anregung von außerhalb der Struktur) oder 3. den Transport von Energie durch die Randflächen des Volumes. Der Transport von Energie erfolgt immer mit der Gruppengeschwindigkeit $\mathbf{c_g}$, so dass $\mathbf{c_g}W$ der auf die Fläche bezogene Energiefluss ist. Für die Energie lässt sich eine Kontinuitätsgleichung aufstellen und um die Verlustleistung P_{diss} und die eingespeiste Leistung P_{in} ergänzen:

$$\frac{\partial}{\partial t}W = -\nabla \cdot (\mathbf{c_g}W) + P_{in} - P_{diss}, \tag{1}$$

Wird diese Gleichung durch das Volumen dividiert, ergibt sich ein Zusammenhang für die Energiedichte. Das Produkt von Energiedichte w und Gruppengeschwindigkeit ist die akustische Energieflussdichte (Poynting-Vektor) $\mathbf{I}$. Somit ist

$$\frac{\partial}{\partial t}w = -\nabla \cdot \mathbf{I} + p_{in} - p_{diss}, \tag{2}$$

wobei mit p die Leistungsdichten bezeichnet sind.

Die Verlustleistung kann mit einem Dämpfungskoeffizient m für sich ausbreitende Wellen erfasst werden:

$$p_{diss} = mc_g w. \tag{3}$$

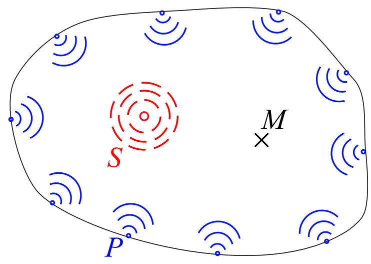

Abbildung 1: Am Ort M wirksame Überlagerung der Felder primärer (am Punkt S) und sekundärer Quellen an Punkten P auf dem Rand

Für den Verlustfaktor η gilt $m = \eta\omega/c_g$. Für zeitlich stationäre Vorgänge ist dann zeitgemittelt:

$$p_{in} = \nabla \cdot \mathbf{I} + mc_g w. \tag{4}$$

$\mathbf{I}$ ist jetzt auch zeitgemittelt und soll deshalb mit dem üblichen Begriff der Schallintensität bezeichnet werden. Die Fundamentallösungen für die sich mit $\mathbf{I} = \mathbf{c_g}w$ ergebende homogene Differentialgleichung

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{c_g}w(M)) + mc_g w(M), \qquad M \neq S. \tag{5}$$

sind $G(S,M) = \frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r^{n-1}}$ für w und $\mathbf{H}(S,M) = \mathbf{c_g}\frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r^{n-1}}$ für $\mathbf{I}$. Sie beschreiben das Energiedichte- und das Intensitätsfeld einer Punktquelle am Punkt, die sich am Ort S in einem n-dimensionalen, unendlichen Gebiet befindet. Zur Anwendung von (4) auf endliche Gebiete müssen Randbedingungen formuliert werden. Eine einfache Randbedingung kann lediglich für die randnormale Komponenten der reflektierten und einfallenden Intensität aufgestellt werden:

$$I_{n,out}(Q) = \varrho(Q) I_{n,in}(Q). \tag{6}$$

ϱ ist der Reflexionsgrad. Mit einer erweiterten Randbedingung kann auch die Transmission in benachbarte Gebiete berücksichtigt werden. Weiter wird angenommen, dass sich das Schallfeld innerhalb eines Gebietes Ω aus der Überlagerung der Schallfelder einer oder mehrerer primärer Quellen und der Schallfelder sekundärer auf dem Rand $\partial\Omega$ des Gebietes befindlicher Quellen ergibt (Abbildung 1). Das ist das Huygens'sche Prinzip. Angewendet auf die Energiegrößen w und $\mathbf{I}$ bedeutet das, dass sich die durch die Quellen hervorgerufenen Energiedichten einfach addieren:

$$w(M) = \int_\Omega \rho(S)G(S,M)dS + \int_{\partial\Omega} \sigma(Q) f(\mathbf{u}_{MQ}, \mathbf{n}_Q) G(Q,M)dQ. \tag{7}$$

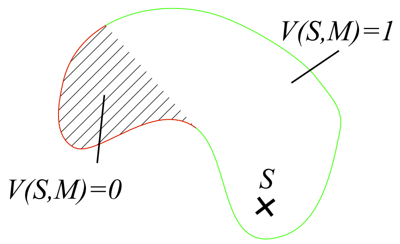

Abbildung 2: Sichtbarkeit bei nicht konkavem Gebiet

Entsprechendes ergibt sich für die Intensität. ρ ist die (gegebene) Quelldichte der primären Quellen. Mit f wird eine zur Randnormalen symmetrische Richtcharakteristik der sekundären Quellen berücksichtigt. Aus hier nicht im Detail dargestellten Überlegungen, die von der Randbedingung (6) ausgehen, kann für die nicht bekannten Quellstärken σ der sekundären Quellen eine Integralgleichung formuliert werden:

$$\sigma(Q) = \frac{\varrho}{\gamma c_g} \left(\int_\Omega \rho(S) \mathbf{H}(S,Q) dS \right.$$
$$\left. + \int_{\partial\Omega} \sigma(Q') f(\mathbf{u}_{QQ'}, \mathbf{n}_{Q'}) \mathbf{H}(Q',Q) dQ' \right) \cdot \mathbf{n}_Q. \quad (8)$$

γ ist eine von n und f abhängige Konstante. Diese Rand-Integralgleichung kann leicht gelöst werden, wenn der Rand in Elemente zerlegt und das Integral über $\partial\Omega$ aus der Summe der Integrale über diese Elemente berechnet wird. Für N Randelemente mit konstanten Ansatzfunktionen ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\sigma_i = \frac{\varrho}{\gamma c_g} \left(\sum_{j=1}^{N_S} \frac{P_{in,j}}{\gamma_n c_g} \mathbf{H}(S_j, Q_i) \cdot \mathbf{n}_i \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \sigma_j f(\mathbf{u}_{Q_i Q_j}, \mathbf{n}_j) \mathbf{H}(Q_j, Q_i) \cdot \mathbf{n}_i \right), i = 1 \ldots N. \quad (9)$$

Mit den so gewonnenen Quellstärken σ_j lässt sich mit

$$w(M) = \sum_{j=1}^{N_S} \frac{P_{in,j}}{\gamma_n c_g} G(S_j, Q_i)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sigma_j f(\mathbf{u}_{MQ_j}, \mathbf{n}_j) G(Q_j, M) \quad (10)$$

die Energiedichte an einem Punkt M innerhalb des Gebietes bestimmen. Mit den bisherigen Überlegungen lassen sich nur konkave Gebiete behandeln. Für nicht konkave Gebiete darf in (8) nur über den von M aus sichtbaren Teil von Ω und $\partial\Omega$ integriert werden. Das lässt sich durch Multiplikation von G mit einer Sichtbarkeitsfunktion V erreichen (Abbildung 2), deren Berechnung allerdings einigen Aufwand bedeutet.

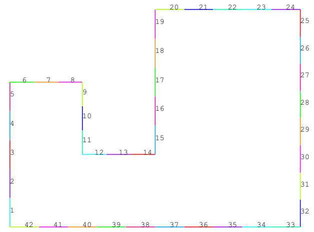

Abbildung 3: Randelemente-Netz mit 42 Elementen

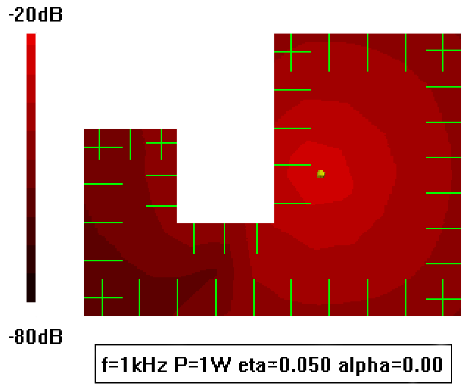

Abbildung 4: Energiedichte auf der Platte bei einer Dämpfung η=5% in dB re 1 J/m^2

Beispielanwendung

Das Verfahren soll beispielhaft für das durch eine Punktquelle mit einer Leistung von 1 W hervorgerufene Körperschallfeld auf einer 4 m×3 m grossen 1 mm dicken Stahlplatte mit nicht konkavem Umriss demonstriert werden. Zur Berechnung wurden 42 Randelemente verwendet (Abbildung 3). Aus den berechneten Quellstärken für die sekundären Quellen auf den Randelementen wurde mit (7) die Energiedichteverteilung berechnet. Die Anwendung der SEA liefert nur einen Mittelwert für die ganze Platte, in diesem Fall -34,5 dB. Zwischen diesem Ergebnis und der tatsächlichen Verhältnissen auf der Platte bestehen abhängig vom Ort z.T. deutliche Differenzen.

Zusammenfassung

Das beschriebene Verfahren erlaubt die Berechnung von hochfrequenten Schallfeldern in ein, zwei und drei Dimensionen mit geringen Rechenaufwand und geht damit sowohl über die Möglichkeiten der SEA als auch über die klassische BEM bzw. FEM hinaus. Um die Betrachtung der Transmission an Stoßstellen ergänzt, lässt es sich auch für komplexe Strukturen einsetzen.

[1] LE BOT, A.: A vibroacoustic model for high frequency analysis. In: *J. Sound Vib.* 211 (1998), Nr. 4, S. 537–554