

Kopplung des TLM-Verfahrens mit einer zeitdiskreten Modellierung von Plattenschwingern zur raumakustischen Simulation bei tiefen Frequenzen

M. Blau*

A. Wilde†

1 Einführung

Während moderne raumakustische Simulationsverfahren im hochfrequenten Bereich ($f \gg c/\sqrt[3]{V}$) zufriedenstellende Vorhersagen liefern, weisen die derzeitigen Ansätze zur Simulation im tieffrequenten Bereich noch viele ungelöste Probleme auf. In diesem Frequenzbereich wird es notwendig sein, Wellenvorgänge sowohl im Schallfeld als auch auf dessen Berandung, sowie die Interaktion beider, zu berücksichtigen [1].

Ein bisher wenig beachteter Ansatz zur Simulation akustischer Wellenphänomene ist das sogenannte "Transmission Line Matrix"-Verfahren (TLM), das ursprünglich zur Simulation elektromagnetischer Wellenleiter entwickelt wurde [2].

Eine anschauliche Interpretation der akustischen Variante des TLM-Verfahrens erhält man, wenn man sich das Schallfeld als ein rechtwinkliges, sich äquidistant kreuzendes Rohrleitungsnetz vorstellt, wobei sich in den Rohren ebene Wellen mit der Phasengeschwindigkeit c_T ausbreiten [3]. Zur Simulation betrachtet man dieses System zu diskreten Zeitschritten $k \pm q$ ($q = 0, 1, \dots$). Diese sollen so gewählt sein, daß die ebenen Wellen innerhalb eines Zeitschrittes genau den Abstand Δ zwischen zwei Netzknoten, d.h. zwischen zwei Kreuzungspunkten des Rohrsystems, zurücklegen.

Im freien Schallfeld findet an jedem Knotenpunkt zwischen den diskreten Zeitschritten eine Umwandlung von sich auf den Knoten zubewegenden, einlaufenden (incident waves, i) in sich von dem Knoten wegbewegende, auslaufende Wellen (scattered waves, s) statt, die durch die Beziehung

$$s^{lmn}(k) = S i^{lmn}(k-1), \quad (1)$$

d.h. eine einfache Matrizenmultiplikation, beschrieben wird. Hierbei sind s^{lmn} und i^{lmn} die Vektoren der Amplituden aller zum Knoten l, m, n hinlaufenden bzw. von ihm weglaufernden Wellen und S ist die sogenannte Streumatrix. Im dreidimensionalen Fall besitzen s^{lmn} und i^{lmn} jeweils 6 Elemente, die Streumatrix besitzt entsprechend die Dimension 6×6 .

Der zu implementierende Algorithmus zur Simulation der Wellenausbreitung im freien Schallfeld besteht daher für jeden Zeitschritt lediglich aus einer Umsetzung von Gl. 1 mit nachfolgender Umsortierung von weglaufernden Wellen zu einlaufenden Wellen für die Berechnung des nächsten Zeitschrittes.

Bei der Modellierung einer Berandung geht man meist davon aus, daß sich letztere $\Delta/2$ vom nächsten Schallfeldknoten entfernt befindet. Dann können einfache (lokal reagierende) Randbedingungen beim Umsortieren der vom Schallfeldknoten zum Rand laufenden Welle in eine vom Rand zum Schallfeldknoten laufende Welle durch Multiplikation der Amplitude mit dem Reflexionsfaktor der Berandung realisiert werden. Für eine ideal reflektierende Berandung wäre der Reflexionsfaktor gleich eins, so daß die vom Rand zum Knoten laufende Welle die gleiche Amplitude wie die vom Knoten zur Wand laufende Welle erhält,

$$d^i \lambda^{\mu\nu}(k) = d^s \lambda^{\mu\nu}(k). \quad (2)$$

Hier sind λ, μ, ν die Koordinaten des der Berandung benachbarten Schallfeldknotens, wobei die Berandung sich in einer Entfernung von $\Delta/2$ in Richtung d (vom Knoten aus gesehen) befindet.

*TU Dresden, Institut f. Akustik u. Sprachkommunikation

†Fraunhofer-Institut f. Integrierte Schaltungen, Außenstelle EAS Dresden

Im folgenden soll diese (eindimensionale) Betrachtungsweise auf mehrere Dimensionen ausgedehnt werden, um nicht-lokal reagierende Wandimpedanzen, in diesem Falle Plattenschwinger, modellieren zu können.

2 Modellierung von Plattenschwingern durch Reflexionsfaktormatrizen

Zur Charakterisierung der Schwingungen des Plattenschwingers wird seine Fläche entsprechend der Maschenweite des TLM-Gitters örtlich diskretisiert. Dabei wird angenommen, daß der Mittelpunkt einer jeden Teilfläche das Schwingungsverhalten der gesamten Teilfläche repräsentiert. An den diskreten Plattenpunkten bestehen zwischen Plattenschnellen v_P und angreifenden Kräften F_P (jeweils senkrecht zur Plattenoberfläche) die Beziehung

$$v_P(\omega) = H_P(\omega) F_P(\omega), \quad (3)$$

wobei $H_P(\omega)$ die $L \times L$ -Matrix aller Übertragungsfunktionen von Kräften zu Schnellen ist.

Das Schallfeld in den von den Plattenteilflächen zum jeweils nächsten TLM-Knoten führenden Rohren ist durch

$$\begin{aligned} p(r, \omega) &= d^s \lambda^{\mu\nu}(\omega) e^{-j\omega r/c_T} + d^i \lambda^{\mu\nu}(\omega) e^{j\omega r/c_T} \\ v(r, \omega) &= \frac{d^s \lambda^{\mu\nu}(\omega)}{\rho c_T} e^{-j\omega r/c_T} - \frac{d^i \lambda^{\mu\nu}(\omega)}{\rho c_T} e^{j\omega r/c_T} \end{aligned} \quad (4)$$

gegeben (r ist die Entfernung vom Rand), d.h. am Rand erhält man für Schalldruck und -schnelle

$$p(0, \omega) = d^s(\omega) + d^i(\omega) \quad (5)$$

$$v(0, \omega) = d^s(\omega)/\rho c_T - d^i(\omega)/\rho c_T, \quad (6)$$

wobei $p(0, \omega)$ und $v(0, \omega)$ die $L \times 1$ -Vektoren der Schalldrücke und -schnellen am Rand und $d^s(\omega)$ und $d^i(\omega)$ die $L \times 1$ -Vektoren der von den der Platte benachbarten Knoten in Richtung d weglaufernden bzw. der zu ihnen zurücklaufenden Wellen sind.

Die Kopplung des Schallfeldmodells mit dem Plattenmodell wird über die Randbedingungen

$$v(0, \omega) = v_P(\omega) \quad (7)$$

$$p(0, \omega) A = F_P(\omega) \quad (8)$$

realisiert. Hier ist A der Flächeninhalt der diskreten Plattenteilflächen. Damit läßt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} d^i(\omega) &= [\mathbf{1} + \rho c_T A H_P(\omega)]^{-1} [\mathbf{1} - \rho c_T A H_P(\omega)] d^s(\omega) \\ &= \mathbf{R}(\omega) d^s(\omega) \end{aligned} \quad (9)$$

zwischen zur Platte hinlaufenden und von der Platte weglaufernden Wellen aufstellen. Mit $\mathbf{1}$ wird hier die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Größe $\mathbf{R}(\omega)$ ist die gesuchte mehrdimensionale Erweiterung des Reflexionsfaktors, die Reflexionsfaktormatrix. Die Reflexionsfaktormatrix gibt die Beziehung zwischen auf den Rand einfallenden und von ihm reflektierten Wellen an. Man kann sich leicht überzeugen, daß $\mathbf{R}(\omega)$ für $L = 1$ zum eindimensionalen Reflexionsfaktor wird.

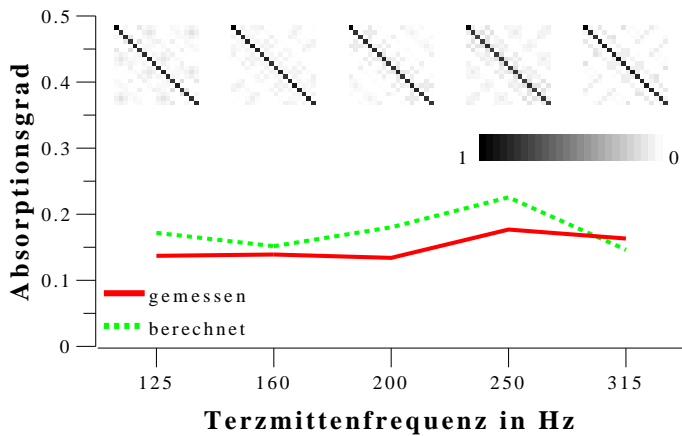


Abb. 1. Absorptionsgrad für diffusen Schalleinfall (Messung versus Vorhersage durch $\mathbf{S}_{rr}(\omega)$) und Kohärenzmatrix $\mathbf{\Gamma}_{rr}^2(\omega)$ der untersuchten Plattenschwinger.

Während die Reflexionsfaktormatrix als komplexwertige Matrix nur eingeschränkt direkte Vorhersagen ermöglicht, können aus

$$\mathbf{S}_{rr}(\omega) = \mathbf{R}^H(\omega)\mathbf{R}(\omega) \quad (10)$$

relativ leicht wichtige Informationen abgeleitet werden. $\mathbf{S}_{rr}(\omega)$ entspricht der Leistungsdichtematrix der reflektierten Schalldrücke, wenn der Plattenschwinger mit Schalldrücken angeregt wurde, welche sich als inkohärente Rauschprozesse mit einer frequenzunabhängigen Leistungsdichte von jeweils eins modellieren lassen. Dieses Szenario entspricht der Anregung durch ein ideal diffuses Schallfeld, so daß sich der Absorptionsgrad für diffusen Schalleinfall aus der Summe der Singulärwerte von $\mathbf{S}_{rr}(\omega)$, dividiert durch die Anzahl der Plattenpunkte (entspricht dem Verhältnis der Gesamtleistung von $\mathbf{S}_{rr}(\omega)$ zur Gesamtleistung der Anregung), für jede interessierende Frequenz errechnen läßt. In Abb. 1 ist der so berechnete Absorptionsgrad für einen Gipskarton-Plattenschwinger ($1.2 \times 0.6 \text{ m}^2$, Diskretisierung alle 0.2 m, $\mathbf{R}(\omega)$ aus der Messung aller Übertragungsfunktionen) einer "klassischen" Messung im Hallraum gegenübergestellt.

Aus $\mathbf{S}_{rr}(\omega)$ läßt sich zweitens eine Kohärenzmatrix $\mathbf{\Gamma}_{rr}^2(\omega)$ berechnen, deren Elemente durch

$$\Gamma_{rr}^2(p, q, \omega) = \frac{|S_{rr}(p, q, \omega)|^2}{S_{rr}(p, p, \omega)S_{rr}(q, q, \omega)} \quad (11)$$

gegeben sind. $\mathbf{\Gamma}_{rr}^2(\omega)$ entspricht der Einheitsmatrix, wenn es sich um eine lokal reagierende Berandung handelt. Spielen dagegen nichtlokale Effekte eine Rolle, werden auch die Nichtdiagonalelemente Werte zwischen null und eins aufweisen. Damit kann $\mathbf{\Gamma}_{rr}^2(\omega)$ für eine erste Abschätzung über zu berücksichtigende Interaktionen benutzt werden. In Abb. 1 ist für den bereits erwähnten Plattenschwinger das Terzmittel von $\mathbf{\Gamma}_{rr}^2(\omega)$ für einige Terzbänder dargestellt. Man sieht, daß nur sehr geringe nichtlokale Effekte auftreten.

3 Zeitdiskrete Implementierung von Reflexionsfaktormatrizen

Um die Modellierung des Plattenschwingers durch die Reflexionsfaktormatrix als Randbedingung in das TLM-System zu integrieren, benötigt man eine zeitdiskrete Realisierung von Gl. 9.

Als besonders günstig erscheint hierfür die Modellierung von $\mathbf{R}(\omega)$ durch Digitalfilter, welche im Bereich der z -Transformation Brüche von Polynomen in z mit jeweils gleichem Nennerpolynom sind,

$$\mathbf{R}(\omega) \approx \frac{1}{a(z)}\mathbf{B}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (12)$$

wobei $a(z)$ ein Polynom und $\mathbf{B}(z)$ eine Polynomialmatrix der gleichen Dimension wie $\mathbf{R}(\omega)$ sind. Vorteile dieser Modellstruktur sind insbesondere die Möglichkeit, die Modellparameter über ein lineares Gleichungssystem unter Ausnutzung von Reziprozität und Symmetrie des Plattenschwingers zu bestimmen als auch die relativ einfache Überprüfung der Stabilität der resultierenden Filter (Nullstellen von $a(z)$ innerhalb des Einheitskreises).

Mit dieser Modellstruktur ergibt sich die zeitdiskrete Realisierung von Gl. 9 zu

$$\mathbf{a}\mathbf{i}(k) = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{a}\mathbf{s}(k) + \dots + \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{a}\mathbf{s}(k - M) - a_1 \cdot \mathbf{a}\mathbf{i}(k - 1) - \dots - a_M \cdot \mathbf{a}\mathbf{s}(k - M). \quad (13)$$

In einer Beispielsimulation wurde ein Raum ($4 \times 6 \times 8 \text{ m}^3$, örtliche Diskretisierung alle 0.2 m) mit insgesamt 8 Plattenschwängern des oben beschriebenen Typs und ansonsten schallharten Wänden modelliert. Eine Schallquelle regte dieses System mit einem GAUSS-Impuls an. Die zeitliche Auflösung ergab sich aus $F_s = c\sqrt{3}/\Delta$ zu 0.336 ms. Nach etwa 4000 Zeitschritten war zu beobachten, daß die Simulation instabil wurde, d.h. es kam zu einem stetig wachsenden, raschen Anstieg des Schalldrucks, ausgehend von den Plattenschwängern.

Da es Stabilitätsbeweise sowohl für das TLM-System [4] als auch für die Digitalfilter (Polstellen innerhalb des Einheitskreises) an sich gibt, muß diese Instabilität aus der Interaktion von TLM-Modell und Plattenmodell herrühren.

In einem ersten Versuch zur künstlichen Stabilisierung des Systems wurden die Nichtdiagonalelemente der Zählerpolynomialmatrizen $\mathbf{B}(z)$ mit einem Passivierungsfaktor bewertet. Für alle Werte dieses Faktors zwischen 0 und 0.8 zeigten sich in der TLM-Simulation im beobachteten Zeitraum von 70000 Zeitschritten keine Anzeichen von Instabilitäten. Die dabei erhaltenen Absorptionsgrade für die 250 Hz-Terz lagen bei ca. 0.13 bzw. 0.17 für Passivierungsfaktoren von 0.8 bzw. 0. Im Vergleich dazu ergaben die Messung einen Wert von 0.16 und die Vorhersage aus der Reflexionsfaktormatrix einen Wert von 0.22.

4 Ausblick

Im vorliegenden Aufsatz wurde der Versuch unternommen, das TLM-Verfahren mit einer zeitdiskreten Modellierung von Plattenschwängern zu koppeln. Erste Simulationsergebnisse zeigen, daß der vorgestellte Ansatz zu Instabilitäten in der Simulation führt, wenn nichtlokale Effekte berücksichtigt werden. Zur Begrenzung dieser Instabilitäten wurde ein Passivierungsfaktor für die nichtlokalen Beiträge vorgeschlagen, der im gewählten Beispiel eine Berechnung des Absorptionsgrades mit befriedigender Genauigkeit ermöglichte.

Bei weiteren Arbeiten sollten sowohl für den vorgeschlagenen Stabilisierungsansatz als auch für alternative Stabilisierungsstrategien der Einfluß auf die Genauigkeit der zu berechnenden raumakustischen Parameter untersucht werden.

Literatur

- [1] M. Vorländer. Geometrische Akustik in kleinen Räumen? In *Fortschritte der Akustik - DAGA 2002, Bochum*. DEGA e.V., 2002.
- [2] P. B. Johns and R. L. Beurle. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. *Proceedings of the Institute of Electrical Engineers*, 118:1203–1208, 1971.
- [3] Y. Kagawa, T. Tsuchiya, B. Fuji, and K. Fujioka. Discrete Huygens' model approach to sound wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 218(3):419–444, 1998.
- [4] S. D. Bilbao. *Wave and scattering methods for the numerical integration of partial differential equations*. PhD thesis, Stanford University, 2001.