

FDTD-Simulationsprogramm zur Berechnung von Ultraschallausbreitung und Kavitation

Marko Liebler

Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik, Universität Karlsruhe; Email: Marko.Liebler@ihe.uka.de

Einleitung

Bei Betrachtungen zur mechanischen Wechselwirkung von Ultraschallwellen mit biologischem Gewebe spielen Kavitationseffekte eine wesentliche Rolle. Dies gilt sowohl für therapeutische Anwendungen, wie die extrakorporale Stosswellenlithotripsie (ESWL), als auch für die Diagnostik, insbesondere im Hinblick auf zunehmend leistungsfähigere diagnostische Ultraschallgeräte oder den Einsatz von Ultraschall-Kontrastmitteln. Um zu einem besseren Verständnis der komplexen Wechselwirkungen zwischen Ultraschallausbreitung und Kavitationsblasen und damit auch der biologischen Wirkungsmechanismen zu gelangen, können Simulationen ein wesentliches Hilfsmittel darstellen.

Mit dieser Arbeit wird ein Simulationsprogramm zur Berechnung der nichtlinearen Ultraschallausbreitung unter Berücksichtigung von Kavitationseffekten vorgestellt. Die Schallausbreitung wird hierbei durch die numerische Umsetzung der hydrodynamischen Grundgleichungen für ein Blasen-Flüssigkeits-Gemisch mittels eines FDTD-Algorithmus berechnet. Die Dynamik der durch den Ultraschall hervorgerufenen Kavitationsblasen wird durch eine eindimensionale sphärische Bewegungsgleichung für den Blasenradius beschrieben. Über eine Betrachtung des Blasenradius als Feldgröße sind beide Modelle gekoppelt. Dadurch wird der Einfluss der Blasendynamik auf das Schallfeld berücksichtigt und ebenso die Auswirkungen veränderter Schallfeldbedingungen auf die Entstehung und Dynamik von Blasenfeldern.

Mathematisches Modell

Die durch die Schallausbreitung entstehenden Kavitationsblasen bilden mit dem umgebenden Fluid ein Gasblasen-Flüssigkeitsgemisch. Die Modellierung dieses Gemisches erfolgt über ein kontinuierliches Zwei-Phasen-Modell [1]. Hierbei wird die Annahme getroffen, dass sämtliche räumliche Änderungen der Schallausbreitung groß sind im Vergleich zum Blasenabstand. Weiterhin ist die lokale Blasendichte $n(\mathbf{x}, t)$, d.h. die Blasenanzahl pro Volumen, so gering, dass Interaktionen zwischen einzelnen Blasen vernachlässigt werden können. Unter der Annahme kugelförmiger Einzelblasen mit dem Radius $R(\mathbf{x}, t)$ ergibt sich der volumetrische Gasanteil $\varphi(\mathbf{x}, t)$ damit zu

$$\varphi = \frac{4}{3} \pi n R^3. \quad (1)$$

Der Blasenradius $R(\mathbf{x}, t)$ wird bei dieser Modellierung als kontinuierliche Feldgröße aufgefasst und beschreibt einen mittleren Blasenradius in der Umgebung des Punktes \mathbf{x} . Mit dem Gasanteil φ ergibt sich die Dichte des Gemisches ρ aus der Dichte der Flüssigkeit ρ_ℓ und des Gases ρ_g zu

$$\rho = (1 - \varphi)\rho_\ell + \varphi\rho_g. \quad (2)$$

Für die betrachteten Anwendungen gilt $\varphi \ll 1$, sowie allgemein $\rho_g \ll \rho_\ell$, so dass hier die Näherung

$$\rho = (1 - \varphi)\rho_\ell, \quad (3)$$

verwendet wird. Mit dem mittleren Druck im Gemisch p und der Schnelle \vec{v} , sowie der Annahme, dass keine Relativbewegung zwischen den einzelnen Phasen stattfindet ($\vec{v} = \vec{v}_g = \vec{v}_\ell$), können die Gleichungen zur Erhaltung von Masse und Impuls für das Gemisch aufgestellt werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla[\rho \vec{v} \vec{v} + p] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Der mittlere Druck im Gemisch ergibt sich zu

$$p = \varphi p_g + (1 - \varphi)p_\ell. \quad (5)$$

Zur Berechnung der Schallausbreitung wird ein akustischer Ansatz verwendet, bei dem die Feldgrößen in einen Ruhe- (Index 0) und einen Wechselanteil getrennt werden. Damit gilt für den Druck in der Flüssigkeit $p_\ell = p_{\ell 0} + \tilde{p}_\ell$, für den Druck in der Gasphase $p_g = p_{g 0} + \tilde{p}_g$, sowie für die Dichte der Flüssigkeit $\rho_\ell = \rho_{\ell 0} + \tilde{\rho}_\ell$. Der Zusammenhang zwischen akustischem Druck (\tilde{p}_ℓ) und akustischer Dichte ($\tilde{\rho}_\ell$) der Flüssigkeit wird über eine nichtlineare Zustandsgleichung hergestellt. Das Einsetzen des akustischen Ansatzes in (eq. 5) führt zusammen mit dieser Zustandsgleichung und der Approximation $p_{g 0} \approx p_{\ell 0}$ auf den Wechseldruck ($\tilde{p} = p - p_0$) im Gemisch

$$\tilde{p} = \varphi \tilde{p}_g + (1 - \varphi) \left(c_\ell^2 \tilde{\rho}_\ell + \frac{B}{2A} \frac{c_\ell^2}{\rho_{\ell 0}} \tilde{\rho}_\ell^2 \right). \quad (6)$$

c_ℓ ist die Schallgeschwindigkeit und B/A der Nichtlinearitätsparameter der Flüssigkeit. Das Verhalten des Gases in den Kavitationsblasen wird durch das ideale Gasgesetz

$$p_g = p_{g 0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa}, \quad (7)$$

mit dem Polytropenindex κ und R_0 als Ruherradius der Blasen beschrieben. Die mathematische Modellierung wird vervollständigt durch die Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Kavitationsblasen mit Hilfe des Gilmore-Modells [2], welches die Kompressibilität der Flüssigkeit berücksichtigt.

Numerische Umsetzung

Das Gleichungssystem ((eq. 3) - (eq. 7)) wird numerisch mit einem expliziten Finiten Differenzen Verfahren im Zeitbereich (FDTD) in Zylinderkoordinaten umgesetzt. Bei der nichtlinearen Schallausbreitung kommt es mit zunehmender Ausbreitung zur Aufsteilung der Wellenfront bis hin zur Ausbildung schwacher Stoßwellen. Die Formulierung der akustischen Gleichungen in Erhaltungsform in Kombination mit einem Verfahren hoher Ordnung garantiert die optimale numerische Behandlung sowohl glatter Lösungen, als auch schwacher Stoßwellen. Eine detaillierte Beschreibung des numerischen Verfahrens wird in [3] gegeben. Die numerische Umsetzung des Gilmore-Modells zur Beschreibung der Blasendynamik erfolgt mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren 5. Ordnung mit adaptiver Schrittweite nach [4].

Simulationen

Die vorgestellten Simulationsergebnisse beschreiben die Ultraschallausbreitung in einem selbstfokussierenden piezoelektrischen Sender mit der in Abbildung 1 dargestellten Geometrie. Bei der Be-

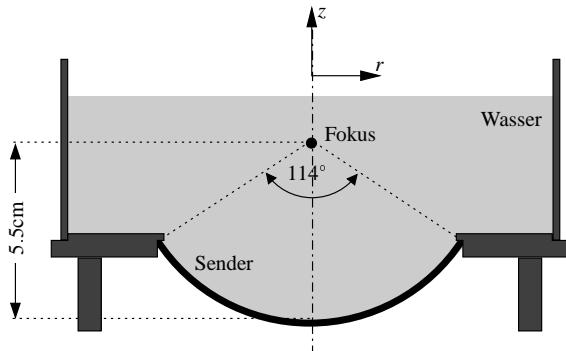


Abbildung 1: Simulationsgeometrie

rechnung wurden folgende Parameter verwendet: Schallgeschwindigkeit $c_\ell = 1481$ m/s, Ruhedichte $\rho_{\ell 0} = 998$ kg/m³, Nichtlinearitätskoeffizient $B/A = 4.88$, hydrostatischer Druck $p_{\ell 0} = 0.1$ MPa, homogen verteilte Blasen mit einer Blasendichte $n = 1 \cdot 10^8$ /m³ und einem Ruheradius $R_0 = 1$ μ m, Viskosität $\mu = 8.019 \cdot 10^{-4}$ kg/(m s), Oberflächenspannung $\sigma = 0.071$ N/m, Polytropenindex $\kappa = 1$, sowie einen als konstant angenommenen Dampfdruck in der Blase $P_d = 0.0023$ MPa. Abbildung 2 zeigt einen Vergleich der Simulationser-

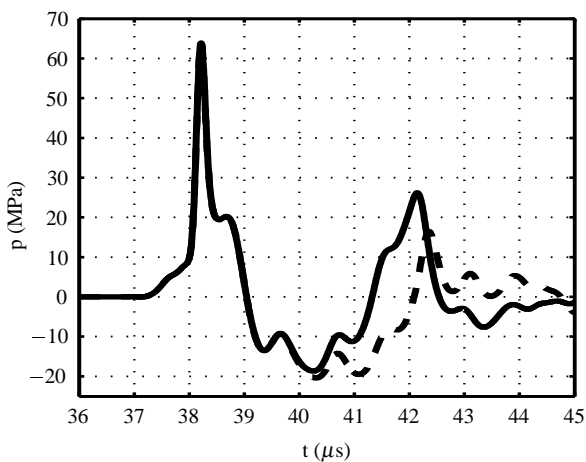


Abbildung 2: Schalldruck im Fokus mit (—) und ohne (- -) Kavitation

gebnisse für den Druck-Zeitverlauf im Fokus mit und ohne ($\varphi = 0$) Berücksichtigung von Kavitationsblasen. Man erkennt eine völlige Übereinstimmung des Druckverlaufes bis zum Erreichen des maximalen Zuganteils, danach führt die Berechnung für die Ausbreitung im Gemisch zu einem insgesamt zeitlich kürzeren Unterdruckanteil und zu größeren Nachschwingungen im Vergleich zur Simulation ohne Kavitationseffekte. In Abbildung 3 sind für einen Ausschnitt des Berechnungsgebietes die räumlichen Verteilungen des Gasanteils φ zu drei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Kurz nachdem das Schallsignal die Fokusregion durchlaufen hat ($t=40$ μ s), beginnen in diesem Bereich die Blasen zu expandieren. Bei $t=75$ μ s ist keine Schallanregung mehr vorhanden, der Gasanteil hat sich durch

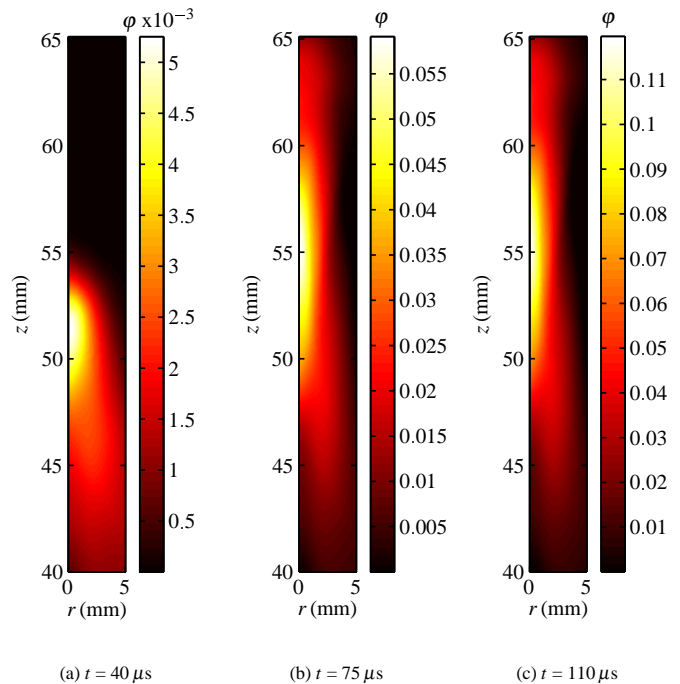


Abbildung 3: Gasanteil φ zu verschiedenen Zeitpunkten

die Blasenexpansion jedoch um etwa einen Faktor 10 erhöht. Die zu diesem Zeitpunkt vorhandene „Blasenwolke“ hat einen Durchmesser von ca. 10mm und eine Länge von ca. 30mm. Durch die weitere Dynamik der Blasen ändert sich in einem räumlich konstanten Bereich lediglich der Gasanteil. Mit Hilfe dieses Simulationsprogrammes ist es damit u.a. möglich, eine Prognose über das Auftreten und die räumliche und zeitliche Entwicklung von Kavitationsblasengebieten für unterschiedliche Therapiesituationen und Drucksignale zu treffen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Gz.: WI 1044/11-2) unterstützt.

Literatur

- [1] WATANABE, M. ; PROSPERETTI, A.: Shock waves in dilute bubbly liquids. In: *J. Fluid. Mech.* 274 (1994), S. 349–381
- [2] GILMORE, F.R.: THE GROWTH OR COLLAPSE OF A SPHERICAL BUBBLE IN A VISCOUS COMPRESSIBLE LIQUID / California Institute of Technology, Hydrodynamics Laboratory, Pasadena, California. 1952. – Report No. 26-4
- [3] GINTER, S. ; LIEBLER, M. ; STEIGER, E. ; DREYER, T. ; RIEDLINGER, R.E.: Full wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 111 (2002), Nr. 5, S. 2049–2059
- [4] CASH, J. R. ; KARP, A. H.: A Variable Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems with Rapidly Varying Right-Hand Sides. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 16 (1990), Nr. 3, S. 201–222