Schnelle Multipol-Randelementmethode für Akustiksimulationen

Matthias Fischer, Lothar Gaul

Institut A für Mechanik, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 9, 70569 Stuttgart, Email: fischer@mecha.uni-stuttgart.de

Einleitung

Die akustischen Eigenschaften spielen heute eine wichtige Rolle in der Produktentwicklung. Die Entscheidung für den Kauf eines Staubsaugers wird oft auf Grund des Geräuscheindrucks getroffen und auch bei der Beschaffung eines Großraumflugzeugs stellt das Geräuschniveau ein wichtiges Kriterium dar. Durch den Einsatz von Akustik-Simulationen lassen sich viele Lärm-Probleme schon früh im Entwicklungsprozess erkennen und die Klangeigenschaften gezielt beeinflussen. Teure Modifikationen an Prototypen können dadurch auf ein Minimum reduziert werden. Herkömmliche Simulationsverfahren erfordern jedoch einen sehr hohen Rechenaufwand und können nur für stark vereinfachte Modelle verwendet werden. Die in diesem Artikel vorgestellten Methoden stellen ein effizienten Simulationswerkzeug dar, dass die Vorhersage der Schallabstrahlung von komplexen schwingenden Strukturen ermöglicht.

Die Randelementmethode (BEM) ist ein Diskretisierungsverfahren für die näherungsweise Lösung von Randintegralgleichungen. Für die Akustik werden diese über die schwache Form der Helmholtz-Gleichung mit der Fundamentallösung als Wichtungsfunktion hergeleitet. Die Randelementmethode ist besonders geeignet für die Simulation von Akustik-Feldern, da nur die Oberfläche der schallabstrahlenden Struktur diskretisiert werden muss und Außenraumprobleme keinen zusätzlichen Aufwand erfordern. Die Anwendung der Randelementmethode wird jedoch durch die vollbesetzten Systemmatrizen erschwert: die Rechenzeit und der Speicherbedarf steigen quadratisch mit der Anzahl der Randelemente an. Dieser numerische Aufwand kann für komplexe industrielle Anwendungen nicht beherrscht werden. In praktischen Berechnungen wird die Elementgröße der Randelementdiskretisierung nach der Faustregel „sechs bis zehn lineare Elemente pro Wellenlänge“ bestimmt, die einen näherungsweise gleichbleibenden Diskretisierungsfehler gewährleistet. Verfeinert man das Randelementnetz, wie von der Faustregel vorgegeben, werden für eine Simulation bei doppelter Frequenz viermal so viele Randelemente benötigt. Durch den quadratischen Aufwand der Randelementmethode ergeben sich also eine 16 mal höhere Rechenzeit und ein 16 mal höherer Speicherbedarf. Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass die herkömmliche Randelementmethode nur für kleine Modelle im niederen Frequenzbereich eingesetzt werden kann.

Für Grundlagen der Randelementmethode wird auf das Buch [1] verwiesen. Details zu den hier präsentierten Methoden sowie weitere Referenzen können der Arbeit [2] entnommen werden.

Multipol-Randelementmethode

Der Multipol-Algorithmus ermöglicht die Auswertung der BEM-Matrix-Vektor-Produkte mit einem numerischen Aufwand, der quasi-linear mit der Anzahl der Freiheitsgrade ansteigt. Für große Randelementmodelle ergibt sich so eine starke Reduktion der Rechenzeit und des Speicherbedarfs. Die Randintegraloperatoren werden für den Multipol-Algorithmus in einen Nahfeld- und einen Fernfeldanteil aufgespalten. Der Nahfeldanteil wird durch eine herkömmliche Auswertung der Fundamentallösung bestimmt. Für den Fernfeldanteil werden die Randelemente in Cluster eingeteilt und in einer Baumstruktur organisiert. Über die Cluster wird die Interaktion der Randelemente im Fernfeld durch eine Multipol-Darstellung der Fundamentallösung berücksichtigt. Die Verwendung von Fern- und Nahfeldrepräsentanten sowie diagonaler Transferoperatoren stellt sich dabei als besonders vorteilhaft heraus.

Auf jeder Ebene des Clusterbaums wird der Nahbereich (N) definiert, für den der Abstand der Cluster unterhalb einer wählbaren Grenze liegt. Cluster, die nicht im Nahbereich selbst, aber im Nahbereich des übergeordneten Clusters liegen, bilden die Interaktionsliste (I). Diese Einteilung ist in Abbildung 1 für eine zweidimensionale Schematisierung des Clusterbaums dargestellt. Den Beitrag eines Randelements im schraffierten Cluster auf der untersten Ebene wird durch die folgenden Schritte des Multipol-Algorithmus berücksichtigt:

- Auf der untersten Ebene wird der Fernfeldrepräsentant aller Elemente im schraffierten Cluster berechnet.
- Der Fernfeldrepräsentant wird in Nahfeldrepräsentanten für die Interaktionsliste umgewandelt.
- Der Fernfeldrepräsentant wird in das Zentrum des übergeordneten Clusters verschoben.
- Die beiden vorherigen Schritte werden beim Aufwärtsdurchgang im Clusterbaum wiederholt, bis die Interaktionsliste leer ist.
- Im Abwärtsdurchgang werden die berechneten Nahfeldrepräsentanten in die untergeordneten Cluster verschoben.
- Auf der untersten Ebene wird der Nahfeldrepräsentant für jedes Randelement ausgewertet und die Nahfeldbeiträge durch eine direkte Auswertung der Fundamentallösung addiert.

Als numerisches Beispiel wird die Lösung eines akustischen Außenraumproblems mit der Burton-Miller-Randelementmethode betrachtet. Auf der Oberfläche eines L-förmigen Gebiets sind Neumann-Randbedingungen

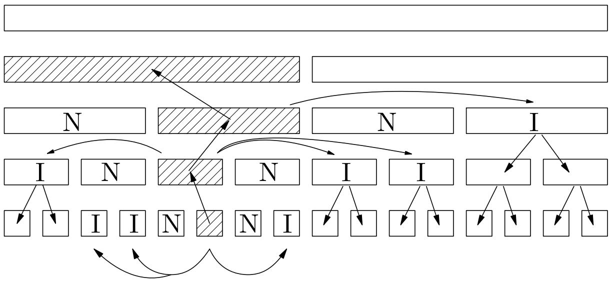

Abbildung 1: Informationsaustausch im Clusterbaum.

vorgegeben, die Auswertung des Burton-Miller-Operators mit einer Diskretisierung von neun Elementen pro Wellenlänge erfolgt mit dem Multipol-Algorithmus. Die Entwicklungslänge des Multipol-Repräsentantens ist so gewählt, dass der Multipol-Fehler gegenüber dem Diskretisierungsfehler von ca. 1% vernachlässigbar ist. Die Rechenzeit für die Lösung des Neumann-Randwertproblems in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade ist in Abbildung 2 dargestellt. Man beobachtet den quasilinearen Anstieg und die deutliche Reduktion des numerischen Aufwands bei der Multipol-BEM für Modelle mit vielen Freiheitsgraden gegenüber der Standard-Randelementmethode.

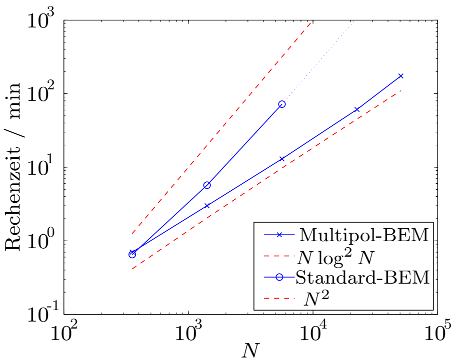

Abbildung 2: Rechenzeit über der Anzahl der Freiheitsgrade N für die Berechnung der Schallabstrahlung von einem L-Gebiet mit neun Elementen pro Wellenlänge.

Approximate-Inverse-Vorkonditionierer

Für die Berechnung von Randelementmodellen mit vielen Freiheitsgraden müssen iterative Gleichungslöser eingesetzt werden. Die bei der Akustik-BEM entstehenden Gleichungssysteme stellen dabei hohe Anforderungen an die Lösungsverfahren: sie sind nicht symmetrisch und nicht positiv definit. Mit geeigneter Vorkonditionierung eignen sich die generalized minimal residual (GMRES) Methode und Mehrgitterlöser als effiziente Lösungsverfahren. Für die Vorkonditionierung beziehungsweise als Glätter für den Mehrgitterlöser wird hier ein Approximate-Inverse-Ansatz präsentiert. Durch Operator-Splitting wird eine dünn besetzte Näherung des Randintegraloperators berechnet, dessen Inverse direkt approximiert und als Vorkonditionierungsmatrix eingesetzt wird. Für das Operator-Splitting wird eine zwei Elemente dünne Umgebung um das betrachtete Element gewählt, dadurch kann der zusätzliche Aufwand zur Berechnung, Speicherung und Anwendung der Vorkonditionierungsmatrix vernachlässigt werden.

In Abbildung 3 ist das Konvergenzverhalten verschiedener Löser dargestellt. Als numerisches Beispiel wird wiederum das L-Gebiet mit der Burton-Miller-Randelementmethode gewählt. Die Oberfläche des L-Gebiets ist mit 1410 Knoten diskretisiert. Der GMRES-Löser ohne Vorkonditionierung konvergiert nur sehr langsam. Durch den Einsatz des Approximate-Inverse-Vorkonditionierers (AI) gelingt eine deutliche Verbesserung. Der Mehrgitterlöser mit Jakobi- und insbesondere mit Approximate-Inverse-Glätter konvergiert mit deutlich weniger Interationsschritten. Jedoch ist ein Mehrgitterschritt deutlich teurer als eine GMRES-Iteration, so dass die beiden AI-Löser ungefähr vergleichbare Rechnezeiten erreichen. Für den praktischen Einsatz empfiehlt sich GMRES, da im Gegensatz zum hier verwendeten geometrischen Mehrgitterlöser keine Gitterhierarchie benötigt wird.

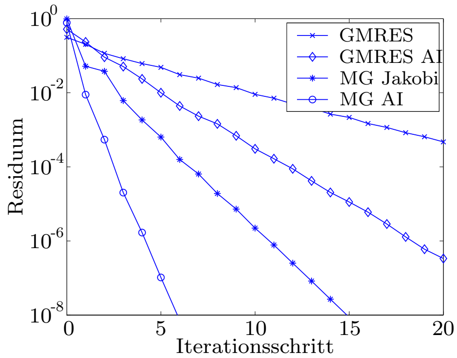

Abbildung 3: Konvergenz des Multigrid- und GMRES-Lösers.

Literatur

[1] Boundary element methods for engineers and scientists. Springer-Verlag, Berlin, 2003

[2] The fast multipole boundary element method and its application to structure-acoustic field interaction. Bericht aus dem Institut A für Mechanik 2004/2, Universität Stuttgart, URL: `http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2004/1959/`