

Berechnung der Schalleistung von offenen Strukturen über Frequenzbereiche mit Hilfe finiter und infiniter Elemente sowie Lanczos-Padé-Approximation

Johannes Baumgart¹, Steffen Marburg², Stefan Schneider³

¹ Institut für Luft- und Raumfahrttechnik, 01062 Dresden, Deutschland, Email: baumgart@tfd.mw.tu-dresden.de

² Institut für Festkörpermechanik, 01062 Dresden, Deutschland

³ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 13402 Marseille cedex 20, Frankreich

Einleitung

Die LANZOS-PADÉ-Approximation hat sich als effiziente Methode zur Reduktion von akustischen Außenraumproblemen erwiesen, die mit finiten und unendlichen Elementen formuliert sind [3, 5, 7]. Die Methode bietet die Möglichkeit, mehrere Ein- und Ausgangsgrößen zu verwenden. Darüber hinaus sind auch unsymmetrische Matrizen, wie sie bei der Methode der unendlichen Elemente auftreten können, zulässig.

Die Effizienzsteigerung geschieht mit der Approximation an einer festen Entwicklungsstelle. Im Ergebnis ist der Fehler um diese Stelle sehr klein. Die Größe des Vertrauensbereiches ist abhängig von der Anzahl der verwendeten Iterationen. Der Fehler lässt sich ohne erhöhten Rechenaufwand nach einer Vereinfachung abschätzen [4], was eine Validierung des Ergebnisses ermöglicht und es gestattet, eine geeignete Lage für die nächste Entwicklungsstelle zu wählen.

Die hier vorgestellte Methode ist besonders geeignet, wenn wenige Eingangsgrößen gegeben sind und nur einige Ausgangsgrößen gesucht werden. Im Falle der Schalleistungsbeziehung ist nur eine skalare Größe von Interesse. Die Randbedingungen auf dem Rand werden als Eingangsgrößen vorgegeben.

Grundlagen

Für ein periodisch sich änderndes Druckfeld p mit kleinen Ausschlägen gegenüber dem statischen Ruhedruck p_0 in einem ruhenden Fluid, bietet die HELMHOLTZ-Gleichung den Ausgangspunkt – eine partielle Differenzialgleichung vom elliptischen Typ. Die Oberflächengeschwindigkeit des Festkörpers in Normalenrichtung \vec{n} stellt eine NEUMANN-Randbedingung auf dem Innenrand dar und sorgt für die Erregung des Fluides. Für die Behandlung der Randbedingung im Unendlichen ist von Belang, wie die Lösung sich dort verhält. Hier ist die Sommerfeldbedingung zu erfüllen, was bedeutet dass es zum Abklingen kommt und nicht zu Reflektionen aus der Ferne zurück auf den Körper.

Zur Lösung der Randwertaufgabe wird die finite Elemente Methode angewendet. Wegen der beiden unterschiedlichen Randbedingungen ist das Gebiet aufgeteilt. Der innere Teil schließt an den schwingenden Körper an und wird mit 8-Knoten finiten Elemente vom Polynomgrad 2 behandelt. Umgeben sind diese mit ASTLEY-LEIS-Elementen [2] die die Sommerfeldbedingung erfüllen.

Durch zusammenfügen steht eine algebraisierte Form der Randwertaufgabe zur Verfügung. Das lineare Gleichungssystem

stem

$$(\mathbf{K} - i\omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (1)$$

verknüpft die an den Knoten am Rand vorgegebene Normalschnelle v_n im Lastvektor \mathbf{f} mit dem Druck an den Knoten \mathbf{p} im gesamten Gebiet. Die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{D} und \mathbf{K} sind reel, frequenzunabhängig und unsymmetrisch. Letzteres entsteht auf Grund von verschiedenen Ansatz- und Testfunktionen für die unendlichen Elemente.

Reduktionsmethode

Der interessierende Bereich der Übertragungsfunktionsmatrix wird an der Entwicklungsstelle ω_o mit $\omega = \tilde{\omega} + \omega_o$ approximiert. Durch ordnen der Terme nach der neuen Variablen $\tilde{\omega}$ ist es möglich das Problem analog zu 1 formulieren.

Die Zustandsraumbeschreibung bietet die Möglichkeit das System nur mit dem linearen Term von ω und einer konstanten Matrix zu beschreiben.

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} = \mathbf{r} \quad (2)$$

mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ -i\omega \mathbf{p} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Hierin sind \mathbf{I} die Einheitsmatrix und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix beziehungsweise der Nullvektor. Eine symmetrische Formulierung ist nicht möglich, da die unendlichen Elemente unsymmetrische Matrizen liefern und die Massenmatrix bei diesen singular sein kann.

Randbedingungen werden nur an ausgewählten Punkten vorgegeben und das Ergebnis ist nur an bestimmten Punkten von Interesse. Die Auswahl der Ein- und Ausgangsgrößen

$$\mathbf{z}_{\text{sel}} = \tilde{\mathbf{L}}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{r}_{\text{sel}} \quad (4)$$

erfolgt mit den Rechteckmatrizen $\tilde{\mathbf{L}}$ und $\tilde{\mathbf{R}}$. Durch ausklammern der Steifigkeitsmatrix ist auch folgende Form

$$\mathbf{z}_{\text{sel}} = \mathbf{L}^T (\mathbf{I} - \omega \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{r}_{\text{sel}} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{r}_{\text{sel}} \quad (5)$$

möglich. Jedoch ist es weiterhin notwendig eine Matrix der Dimension $N \times N$ für jeden einzelnen Frequenzschritt zu invertieren. Die Übertragungsfunktion lässt sich als MACLAURINSche-Reihe darstellen

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{H}(0) + \frac{\omega}{1!} \frac{\partial \mathbf{H}(0)}{\partial \omega} + \frac{\omega^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0)}{\partial \omega^2} + \dots \quad (6)$$

mit den Koeffizienten

$$\frac{\partial^k \mathbf{H}(0)}{\partial \omega^k} = k! ((\mathbf{A}^T)^{k_1} \mathbf{L})^T \mathbf{A}^{k_2} \mathbf{R} \quad \text{mit } k = k_1 + k_2. \quad (7)$$

Die auftretenden Vektoren sollen verwendet werden, lineare Abhängigkeiten der Vektoren untereinander muss jedoch verhindert werden. Dazu werden n -Vektoren des rechten KRYLOV-Unterraumes für \mathbf{W}_n

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \text{span}\{\mathbf{R}, \mathbf{A} \mathbf{R}, \mathbf{A}^2 \mathbf{R}, \dots, \mathbf{A}^{\lceil \frac{n}{m} \rceil - 1} \mathbf{R}\} \quad (8)$$

und zum Anderen der linke n -te KRYLOV-Unterraum für \mathbf{V}_n

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{A}^T, \mathbf{L}) = \text{span}\{\mathbf{L}, \mathbf{A}^T \mathbf{L}, (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{L}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{\lceil \frac{n}{q} \rceil - 1} \mathbf{L}\}. \quad (9)$$

eingeführt. Die Basisvektoren hiervon sind biorthogonal zueinander definiert, was mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{\Delta}_n = \mathbf{W}_n^T \mathbf{V}_n \quad \text{mit } \mathbf{\Delta}_n^{(i,j)} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (10)$$

in Matrizenform dargestellt ist. Diese werden mit einem Algorithmus bestimmt, der auf Arbeiten von ALIAGA et al. [1] basiert.

Mit Hilfe dieser Vektoren ist es nun möglich die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}_n(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{0}_{(n-q) \times q} \end{bmatrix}^T (\mathbf{I} - \omega \mathbf{T}_n)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{W}_n^T \mathbf{A} \mathbf{V}_n, \\ \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{W}_n^T \mathbf{R} \quad \text{und} \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{\Delta}^{-T} \mathbf{V}_n^T \mathbf{L} \end{aligned} \quad (12)$$

so zu schreiben, dass nur noch eine Matrix der Größe $n \times n$ in jedem Frequenzschritt invertiert werden muss.

Rechnung

Als Beispiel ist hier die Berechnung eines offenen Profils in 2D vorgestellt. Die Routinen hierzu sind mit SCILAB [6] geschrieben. Die Anzahl der verwendeten quadratischen finiten Elemente ist 66 und die der infiniten 24 auf dem äußeren Rand. Die Ordnung der infiniten Elemente in radialer Richtung ist 5 und in Umfangsrichtung gleich der quadratischen finiten Elemente. Die Gesamtzahl der Knoten beträgt 356 und die Erregung findet auf dem Innenrand statt.

Gesuchte Ausgangsgröße ist die skalare Schallleistung, welche

$$P_n(\omega) = \frac{1}{2} \Re \left\{ (\mathbf{v}_n^{\text{sel}})^H \mathbf{H}_n(\omega) \mathbf{v}_n^{\text{sel}} i \omega \varrho \right\} \quad (13)$$

auf dem Innenrand mit 5 Entwicklungsstellen berechnet wird.

In dieser Rechnung hat sich die Methode von BAI [4] als geeignet erwiesen um den Fehler abzuschätzen. Für dieses Problem schwankt die benötigte Anzahl der Iterationen im Bereich $n = 10, \dots, 20$.

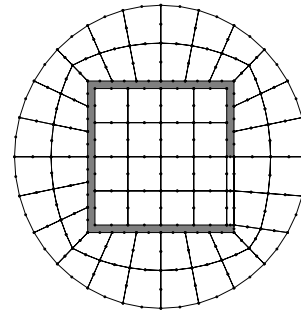


Abbildung 1: Netz des offenen Profils ohne infinite Elemente

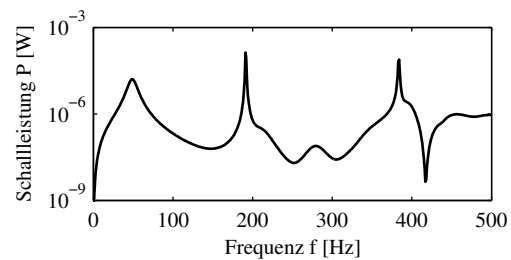


Abbildung 2: Abgestrahlte Schallleistung des offenen Profils

Literatur

- [1] ALIAGA, J. I. ; BOLEY, D. L. ; FREUND, R. W. ; HERNÁNDEZ, V.: A Lanczos-type method for multiple starting vectors. In: *Mathematics of Computation* 69 (2000), S. 1577–1601
- [2] ASTLEY, R. J. ; COYETTE, J.-P. ; CREMERS, L.: Three dimensional wave envelope elements of variable order for acoustical radiation and scattering. Part ii: Formulation in the time domain. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 103 (1998), S. 64–72
- [3] BAUMGART, J.: *Effiziente Berechnung akustischer Probleme über Frequenzbereiche mit Hilfe finiter und infiniten Elemente sowie Lanczos-Padé-Approximation*, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2003
- [4] BAI, Z. ; YE, Q.: Error estimation of the Padé approximation of transfer functions via the Lanczos process. In: *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 7 (1998), S. 1–17
- [5] MEERBERGEN, K. ; ROBBÉ, M.: Theory and software for Krylov methods for the computation of the frequency response of large acoustic finite element models. In: *Proceedings of Forum Acusticum, Special Issue of Revista de Acustica, A. Calvo-Manzano, A. Perez-Lopez und J. S. Santiago (Hg.)* 33 (Sevilla 2002), Nr. 3–4. – auf CD
- [6] SCILAB: *Scilab reference manual*. Project Meta2. Le Chesnay (France): INRIA, 2001.
- [7] WAGNER, M. M. ; PINSKY, P. M. ; MALHOTRA, M.: Application of Padé via Lanczos approximations for efficient multifrequency solution of Helmholtz problems. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 113 (2003), Nr. 1, S. 313–319