Ermittlung des akustischen Übertragungsverhaltens zur Optimierung aktiver Schallreduktion

Ronny Rössel[1], Delf Sachau[2]

[1] *Helmut-Schmidt-Universität, 22043 Hamburg, Deutschland, Email: ronroess@hsu-hh.de*

[2] *Helmut-Schmidt-Universität, 22043 Hamburg, Deutschland, Email: sachau@hsu-hh.de*

Einleitung

Für die Reduktion tieffrequenten Lärms werden verstärkt aktive Ansätze (ANC - „active noise control“) verfolgt. Ziel dieser ANC- Systeme ist eine Minimierung (zumindest lokale) des Schalldruckpegels. Dazu wird dem Schallfeld der störenden Lärmquellen ein zusätzliches aus Lautsprechern überlagert. Zur Kontrolle dieses Schallfeldes werden Sensoren (Mikrofone) und eine Regeleinrichtung benötigt. Eine geforderte Schalldruckreduktion an den Mikrofonen mit einer minimalen Anzahl von Lautsprechern lässt sich nur erzielen, wenn die Lautsprecher optimal positioniert sind.

Im folgenden wird ein Verfahren vorgestellt mit Hilfe dessen die Übertragungsfunktionen von oberflächennormlen Beschleunigungen möglichen Lautsprecherpositionen zu Schalldrücken möglichen Mikrofonpositionen aus einem FE-Modell gewonnen werden. Hintergrund ist das konkrete Problem der aktiven Schallreduktion für den Arbeitsbereich des Lademeisters (LMWS - „load master working station“) des A400M [1] (Abb. 1). Mit Hilfe dieser Übertragungsfunktionen kann eine optimale Positionierung der Lautsprecher in der LMWS erfolgen [2].

Abbildung 1: A400M [3] und LMWS- Versuchstand

Grundbetrachtung

Die Feldgleichung für den Schallwechseldruck im Frequenzbereich ergibt sich aus der Helmholtzgleichung, welche im Sinne der FEM beispielsweise in ein gewichtetes Residuenverfahren eingesetzt wird. Unter Nutzung der Produktregel bei Ableitungen kann daraus folgende Gleichung [4] ermittelt werden (in Matrizenschreibweise)

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla\bar{w})^T \nabla\hat{p} d\Omega - \int\limits_{\Omega} k^2 \bar{w}\hat{p} d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla^T (\bar{w}\nabla\hat{p})\, d\Omega, \quad (1)$$

mit dem ortsabhängigen Schallwechseldruck $\hat{p}$, der Kreiswellenzahl k, dem Nabla- Operator ∇ und der Wichtungsfunktion $\bar{w}$ im betrachteten Gebiet Ω. Benutzt man

$$\nabla p = -\rho\vec{a}, \quad (2)$$

mit der Dichte ρ und der ortsabhängigen Beschleunigung $\vec{a}$ des Mediums und den Gaußschen Integralsatz, ergibt sich für die rechte Seite von Gleichung (1)

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla\bar{w})^T \nabla\hat{p} d\Omega - \int\limits_{\Omega} k^2 \bar{w}\hat{p} d\Omega = -\rho \int\limits_{\Gamma} \hat{a}\bar{w} d\Gamma, \quad (3)$$

mit der oberflächennormalen Beschleunigung $\hat{a}$, welche sich aus dem Skalarprodukt des Normalenvektors auf der Oberfläche Γ und dem Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ ergibt.

Gleichung (3) wird im Sinne der FEM mit Hilfe eines Ritz-Ansatzes für die Druck- und Wichtungsfunktion diskretisiert. Eine Umstellung und Vereinfachung ergibt

$$\left[\int\limits_{\Omega} \left(\nabla N_w^T\right)^T \left(\nabla N_p^T\right) d\Omega - k^2 \int\limits_{\Omega} \left(N_w^T\right)^T \left(N_p^T\right) d\Omega\right] \hat{p}_a = -\rho \int\limits_{\Gamma} \hat{a} \left(N_w^T\right)^T d\Gamma. \quad (4)$$

Gleichung (4) wird vereinfacht zu

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{a}, \quad (5)$$

mit

$$\mathbf{A} = (\mathbf{K} - k^2\mathbf{M}). \quad (6)$$

Darin ist $\mathbf{A}$ die Systemmatrix des Gleichungssystems und $\mathbf{K}$ nach [5] die Quasi-Steifigkeitsmatrix, $\mathbf{M}$ die Quasi-Massenmatrix, $\mathbf{p}$ der Druckvektor und $\mathbf{a}$ der Vektor der oberflächennormalen Beschleunigungen.

Aufgabenstellung

Das Gleichungssystem (5) stellt einen Zusammenhang zwischen den Schallwechseldrücken und den oberflächennormalen Beschleunigungen aller Knoten des FE-Netzes her. Die Aufgabe besteht darin, aus diesem Gleichungssystem ein Übertragungssystem zu ermitteln, so das für Beschleunigungsanregungen an bestimmten Lautsprecherpositionen $\mathbf{a_L}$ die Schallwechseldrücke an vorgegebenen Mikrofonpositionen $\mathbf{p_M}$ berechnet werden können

$$\mathbf{p_M} = \mathbf{Ba_L}. \quad (7)$$

Dazu besteht die Notwendigkeit, die Systemmatrix $\mathbf{A}$ des Gleichungssystems (5) zu invertieren und das gesamte Gleichungssystem auf die gegebenen Lautsprecher- und Mikrofonpositionen zu minimieren.

Aufgabenlösung

Die Invertierung der Systemmatrix **A** wird in MATLAB durchgeführt. Dazu müssen zuerst die Quasi-Steifigkeitsmatrix **K** und die Quasi-Massenmatrix **M** aus einem NASTRAN-Modell nach MATLAB eingelesen und dort nach Gl. (6) zu **A** zusammengefasst werden. Die direkte Invertierung von **A** über den MATLAB-Befehl *inv(**A**)* ist auf Grund von Speicherplatzproblemen nur für FE-Modelle kleiner ca. 5000 Freiheitsgrade anwendbar. Für größere Modelle wird $\mathbf{A}^{-1}$ durch sukzessive Gleichungslösung gewonnen. Dies wird folgend an Hand eines Beispiels mit 3 Freiheitsgraden erläutert. Für den Vektor **a** werden folgende drei Vorgaben getroffen

$$\mathbf{a_I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{8}$$
$$\mathbf{a_{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{9}$$
$$\mathbf{a_{III}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{10}$$

Nacheinander wird für jede Vorgabe das lineare Gleichungssystem (5) in MATLAB numerisch gelöst, was zu drei Druckvektoren führt

$$\mathbf{p_I} = \begin{bmatrix} p_{I1} & p_{I2} & p_{I3} \end{bmatrix}^T, \tag{11}$$
$$\mathbf{p_{II}} = \begin{bmatrix} p_{II1} & p_{II2} & p_{II3} \end{bmatrix}^T, \tag{12}$$
$$\mathbf{p_{III}} = \begin{bmatrix} p_{III1} & p_{III2} & p_{III3} \end{bmatrix}^T. \tag{13}$$

Fasst man die drei Berechnungen zusammen, kann man auch schreiben

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{p_I} & \mathbf{p_{II}} & \mathbf{p_{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_I} & \mathbf{a_{II}} & \mathbf{a_{III}} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_I} & \mathbf{a_{II}} & \mathbf{a_{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \tag{15}$$

folgt aus (14)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p_I} & \mathbf{p_{II}} & \mathbf{p_{III}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}. \tag{16}$$

Die Inverse der Systemmatrix **A** wird so Spalte für Spalte durch numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen gewonnen. Man erhält

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}, \tag{17}$$

worin weiterhin ein Zusammenhang zwischen allen Knoten des FE-Modells gegeben ist. Um (17) auf das gesuchte Übertragungssystem (7) zu reduzieren, werden die entsprechenden Komponenten aus **p** und die Zeilen aus $\mathbf{A}^{-1}$ und die entsprechenden Komponenten aus **a** und die Spalten aus $\mathbf{A}^{-1}$ gelöscht. Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ aus (17) geht dabei in **B** aus (7) über. Ergebnis ist das gesuchte Übertragungssystem (7) zwischen den oberflächennormalen Beschleunigungen an gegebenen Lautsprecherpositionen und den Drücken an gegebenen Mikrofonpositionen.

Anwendung

Dieses Verfahren wurde auf ein FE-Modelle mit 92637 Freiheitsgraden angewendet. Für dieses FE-Modell wurden die Übertragungsfunktionen von oberflächennormalen Beschleunigungsanregungen an 126 Lautsprecherpositionen auf Schallwechseldrücke an 10 Mikrofonpositionen innerhalb der LMWS ermittelt. Da nur 126 Lautsprecherpositionen vorgegeben waren, musste die Systemmatrix **A** nicht komplett invertiert werden, d. h. es mussten nicht 92637 lineare Gleichungssysteme, sondern nur 126 lineare Gleichungssysteme numerisch gelöst werden. Zur numerischen Lösung dieser linearen Gleichungssysteme wurde ein Verfahren nach dem MINRES-Algorithmus [6] in MATLAB benutzt. Die Rechenzeit, die benötigt wird, um die Übertragungsmatrix **B** zu ermitteln, ist abhängig von der Genauigkeit, mit der die linearen Gleichungssysteme numerisch gelöst werden sollen. Im vorliegenden Fall wurde die relative Genauigkeit mit 10^{-10} so nah wie möglich an die Konvergenzgrenze des Lösers gelegt. Für diese Vorgabe betrug die Rechenzeit ungefähr 3,5 Stunden auf einem Standard-PC (3,2GHz, 2GB RAM).

Zusammenfassung

Es wurde ein Verfahren vorgestellt, welches in MATLAB codiert ist und mit Hilfe dessen aus einem FE-Modell die Übertragungsfunktionen der oberflächennormalen Beschleunigungen von gegebenen Lautsprecherpositionen zu Drücken an gegebenen Mikrofonpositionen bestimmt werden können. Die Ermittlung dieser Übertragungsfunktionen erfolgt für FE-Modelle mit mehr als 5000 Freiheitsgraden durch numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen, da die Invertierungsroutine von MATLAB für diese Anwendungsfälle nicht nutzbar ist.

Literatur

[1] Gerner, C.; Sachau, D.; Breitbach, H. (2003) - *Active Noise Control in an Semi- Enclosure within an Aircraft Cabin* - 10th Intern. Congr. on Sound and Vibration, Stockholm, Schweden

[2] Sachau, D.; Gerner, C. (2005) - *Optimierungsverfahren zur Bestimmung der Aktuator- und Sensorpositionen für ein aktives Schallreduzierungssystem* - DAGA '05, München, Deutschland

[3] Reference to the AIRBUS homepage. URL: `http://www.airbusmilitary.com/gallery.html`

[4] Bathe, K.-J. (2002) - *Finite-Elemente-Methoden* - Springer Verlag, Berlin, 2. Aufl.

[5] Groth, P. (2002) - *FEM- Anwendungen, Statik-, Dynamik- und Potenzialprobleme mit professioneller Software lösen* - Springer Verlag, Berlin, 1. Aufl.

[6] Meister, A. (1999) - *Numerik linearer Gleichungssysteme, Eine Einführung in moderne Verfahren* - Vieweg Verlag, Braunschweig, 1. Aufl.