FE-basierende Extrapolation gedämpfter Schalldruckfelder

Robert Anderssohn[1,3], Christian Großmann[2], Hans-Jürgen Hardtke[1], Steffen Marburg[1]
[1] *Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland*
[2] *Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland*
[3] *Email: anderssohn@ifkm.mw.tu-dresden.de*

Einleitung

Für die Abschätzung akustischer Eigenschaften mittels dynamischer Simulationen an Struktur-Fluid-Systemen interessiert die globale experimentelle Bestimmung der Wandadmittanz. Sie kann aus dem von den Wänden umgebenen Schalldruckfeld berechnet werden. Da der Druck nahe des Randes schlecht messbar ist, soll ein Algorithmus geschaffen werden, mit dem das Schallfeld aus Messungen im Innern des Fluids rekonstruiert werden kann. Die dafür notwendige akustische Randwertaufgabe wird auf der Basis der Methode der finiten Elemente (FEM) diskretisiert. Der Vortrag fokussiert die Aufstellung eines linearen Ansatzes, der gemessene und unbekannte Werte des Schalldruckes an den Knoten des FE-Netzes in Beziehung setzt. Ein Schwerpunkt der Untersuchung ist das dabei entstehende, schlecht konditionierte Gleichungssystem der invers formulierten diskreten Randwertaufgabe. Der Ansatz ist eine erste Näherungslösung der FE-basierenden, inversen Innenraumakustik.
Es existieren praktisch keine gängigen Verfahren, Wandadmittanzen durch inverse Formulierungen numerischer Methoden global zu ermitteln. Stand der Technik sind die Nearfield Acoustic Holography (NAH, [1, 2]) und die Inverse Boundary Element Method (IBEM, [3, 4]). Sie dienen der Rekonstruktion dynamischer Randbedingungen, lassen allerdings keine Parameteridentifikation für Wandadmittanzen beliebiger Stärke zu.
Die Wahl der Diskretisierung mit FEM wird mit dem Ziel begründet, den experimentellen Aufwand durch die Nutzbarmachung der extrahierbaren modalen Zusammenhänge in Form von optimierten Ansatzfunktionen minimieren zu können.
Den inversen Betrachtungen werden im Folgenden die dafür notwendigen numerischen Grundlagen inklusive die akustische Vorwärtslösung vorangestellt. An zweidimensionalen Beispielen festgestellte Eigenschaften des untersuchten Ansatzes werden am Schluss zusammengefasst. Für die Beispiele werden einige Schalldruckergebnisse der Vorwärtsrechnung an ausgewählten Innenknoten bei der inversen Rechnung als gegebene Größen verwendet.

Akustische Grundlagen und FE-Diskretisierung

Gegenstand des behandelten Problems ist das dynamische Schallfeld eines leichten Gases in einem geschlossenen Raum. Ausgehend von der Formulierung einer einseitigen Struktur-Fluid-Kopplung beschreibt die wohl bekannte lineare Wellengleichung die strömungsmechanischen Vorgänge. Für den harmonischen Schwingungszustand kann die Wellengleichung mit Hilfe des Bernoullischen Produktansatzes

$$\tilde{p}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \Re\{p(\vec{\boldsymbol{x}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} \tag{1}$$

in den Frequenzbereich transformiert werden. Das Ergebnis ist die Helmholtz-Differentialgleichung

$$\Delta p(\vec{\boldsymbol{x}}) + k^2 p(\vec{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \tag{2}$$

für die Schalldruckamplitude $p(\vec{\boldsymbol{x}})$ bei der Wellenzahl k. Die Robin-Randbedingung

$$p_{,n}(\vec{\boldsymbol{x}}) = sk\left[v_s(\vec{\boldsymbol{x}}) + Y(\vec{\boldsymbol{x}})p(\vec{\boldsymbol{x}})\right], \ \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma,\ s = \mathrm{i}\rho_0 c \tag{3}$$

berücksichtigt neben der Strukturschnelle v_s auch Dämpfung und Steifigkeit der Wand durch die Admittanz Y. ρ_0 und c sind die konstante Dichte und die Schallgeschwindigkeit des Fluids.
Mit der lokalen Definition der Admittanz lässt sich die aus der Helmholtz-Gleichung und der gemischten Randbedingung in den Gleichungen 2 und 3 bestehenden Randwertaufgabe für Räume beliebiger Geometrie mit FEM diskretisieren:

$$(\boldsymbol{K} - k^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{p} = sk\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}_s + Y\boldsymbol{p}). \tag{4}$$

Darin sind $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{F}$ die Steifigkeits-, Massen- und Randmassenmatrix. Mit der Umformung zu

$$(\boldsymbol{K} - k^2\boldsymbol{M} - \mathrm{i}k\boldsymbol{D})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

bekommt man die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{D}$ und den Vektor der rechten Seite $\boldsymbol{b}$. Die gemeine Lösung dieses Gleichungssystems für den Druck erfolgt mittels direkter Inversion der Systemmatrix bei fester Frequenz oder modal über die Zustandsraumbeschreibung 2. Form für Frequenzintervalle mit konstanten Admittanzwerten.
Schallquellen im Innern des Raumes werden durch partikuläre Anteile der Helmholtz-Gleichung beschrieben.

Inverse FE-Raumakustik

Die Hauptaufgabe ist ein Konzept für die FE-basierende inverse Akustik. Dabei soll das Druckfeld aus einigen bekannten Werten vollständig rekonstruiert werden. Gelingt dies mit hinreichender Genauigkeit, kann die Wandadmittanz über die Robin-Randbedingung abgeschätzt werden.
Der Druck sei an einigen Knoten des FE-Netzes im Innern des Gebietes bekannt (indiziert mit m). Über eine inverse Formulierung der Gleichung 5 sollen damit die restlichen Drücke im Innern (f) und auf dem Rand (r)

berechnet werden.
Fasst man $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{M}$ zur Neumannschen Systemmatrix $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{K} - k^2\boldsymbol{M}$ zusammen, lässt sich Gleichung 5 in

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{rr} & \boldsymbol{G}_{rf} & \boldsymbol{G}_{rm} \\ \boldsymbol{G}_{fr} & \boldsymbol{G}_{ff} & \boldsymbol{G}_{fm} \\ \boldsymbol{G}_{mr} & \boldsymbol{G}_{mf} & \boldsymbol{G}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_r \\ \boldsymbol{p}_f \\ \boldsymbol{p}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_r + \mathrm{i}k\boldsymbol{D}_{rr}\boldsymbol{p}_r \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{6}$$

aufspalten.
Motiviert durch die Erkenntnis von Marburg [5], dass eine BEM-basierende inverse Formulierung die Berechnung des Druckfeldes ohne Kenntnis der Wandadmittanz zumindest theoretisch ermöglicht, sollen zunächst die beiden unteren Zeilen der Gleichung 6 ausgewertet werden. Ein direkter Lösungsansatz ist

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{fr} & \boldsymbol{G}_{ff} \\ \boldsymbol{G}_{mr} & \boldsymbol{G}_{mf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_r \\ \boldsymbol{p}_f \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{fm} \\ \boldsymbol{G}_{mm} \end{bmatrix} \boldsymbol{p}_m. \tag{7}$$

Gleichung 7 ist ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Drücke im Innern und auf dem Rand.
Außerdem wird ein modifizierter Ansatz betrachtet, bei dem die Moden des Dirichlet-Problems als verbesserte Ansätze benutzt werden.
Beide Ansätze können in

$$(\boldsymbol{A} - k^2\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{q} \tag{8}$$

umgeformt werden, wobei $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ statische Matrizen sind und somit eine modale Lösung des Gleichungssystems zuließen. Die Eigenwertzerlegung für Bereiche konstanter Admittanz gelingt bei im Allgemeinen rechteckigen Matrizen über die Methode der kleinsten Quadrate, da quadratische Matrizen benötigt werden. Diese Näherungslösung lieferte bis zu dem Stand der Untersuchungen kein sinnvolles Ergebnis für die schlecht konditionierten Systemmatrizen des inversen Problems.
Anstelle dessen lässt eine Singulärwertzerlegung der Matrix $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} - k^2\boldsymbol{B}$ bei fester Frequenz eine regularisierte Lösung des linearen Gleichungssystems zu. Die Methode von Tikhonov [6] wird angewandt, wobei der dabei auftretende Regularisierungsparameter für eine optimierten Lösung mit Hilfe des L-Kurven-Kriteriums [6, 7] bestimmt wird.

Anwendung und Ausblick

Ein linearer, FE-basierter Ansatz der inversen Akustik eines durch Wandadmittanzen gedämpften Innenraumes wird dargestellt.
Um dem experimentellen Aufwand vorzugreifen und die Funktionalität der inversen Algorithmen zu testen, werden einige der Schalldruckwerte des Referenzfeldes, das die Lösung der akustischen Randwertaufgabe ist, für die bekannten Messgrößen der inversen Rechnung verwendet. Berechnungen an zweidimensionalen Modellen, wie zum Beispiel das rekonstruierte Schallfeld eines Fahrzeuginnenraumes in Abbildung 1, zeigen, dass die unvollständige lineare Auswertung der schlecht konditionierten inversen Systemgleichung das Schallfeld unter Zuhilfenahme einer Regularisierungsmethode bis auf Abweichungen ausschließlich im Randbereich des Gebietes gut

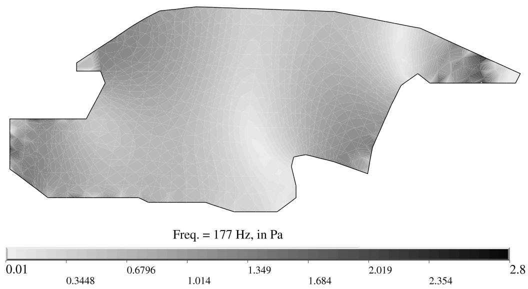

Abbildung 1: Mit inverser FEM rekonstruiertes Schalldruckfeld des Modelles eines Fahrzeuginnenraumes bei 177 Hz

reproduziert. Es kann eine Verbesserung durch den erweiterten Dirichlet-Ansatz festgestellt werden, bei dem die Eigenvektoren des Dirichlet-Problems als globale Ansatzfunktionen verwendet werden.
Selbst unterbestimmte Probleme weisen ein vergleichbares Verhalten auf, so dass eine Verbesserung des Lösungsansatzes tatsächlich eine Minimierung der Anzahl bekannter Drücke vermuten lässt. Die nächsten Untersuchungen werden sich daher auf die Auswertung des gesamten Gleichungssystems konzentrieren. Das wird über eine auf modalen Ansatzfunktionen beruhende nicht-lineare Optimierung erfolgen.

Literatur

[1] J. D. Maynard, E. G. Williams, Y. Lee: Nearfield acoustical holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH. In: *Jounal of the Acoustical Society of America* Bd. 78. 1985, S. 1395–1413

[2] J. D. Maynard. *Nearfield acoustical holography: A Review*. Inter-Noise, The Hague, Holland. 2001

[3] W. A. Veronesi, J. D. Maynard: Digital holographic reconstruction of source with arbitrarily shaped surfaces. In: *Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 85. 1989, S. 588–598

[4] B.-K. Kim und J.-G. Ih: On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. In: *Jounal of the Acoustical Society of America* Bd. 100. Academic Press Inc., 1996, S. 3003–3016

[5] H.-J. Hardtke und S. Marburg: A boundary element method based procedure to calculate boundary admittance from measured sound pressures. In: *Engineering analysis with boundary elements* Bd. 21. 1998, S. 185–190

[6] P. C. Hansen: The L-Curve and its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems. In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*. Southampton : WIT Press, 2001 (Advances in Computational Bioengineering 5), S. 119–142

[7] R. Visser: *A boundary element approach to acoustic radiation and source identification*. Enschede, University of Twente, Diss., 2004