

Der Einfluss des radialen Strömungsprofils auf die Schallausbreitung von höheren Moden in zylindrischen Strömungskanälen

Oliver Kornow¹, Lars Enghardt²

¹ Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik,
Technische Universität Berlin, 10623 Berlin, Deutschland, Email: Oliver.Kornow@tu-berlin.de

² Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Institut für Antriebstechnik,
Abteilung Turbulenzforschung, 10623 Berlin, Deutschland, Email: Lars.Enghardt@dlr.de

Einleitung

Der Schall breitet sich in koaxialen oder zylindrischen Strömungskanälen über einen weiten Frequenzbereich in Form von höheren Moden aus. Diese Schallausbreitung wird durch eine konvektive Differentialgleichung beschrieben, für die unter der Annahme von Isentropie, Reibungsfreiheit und Inkompressibilität eine Serie von analytischen Lösungen existiert (die Moden), wenn man als Randbedingung schallharte Wände sowie ein vom Radius unabhängiges Strömungsprofil mit konstanter Machzahl ansetzt. Für jede ausbreitungsfähige Mode kann so die in bzw. gegen Strömungsrichtung transportierte Schalleistung analytisch berechnet werden.

Für typische Strömungsgeschwindigkeiten von $M=0.3$ stellt sich die Frage, welchen Einfluss ein in der analytischen Lösung nicht berücksichtigtes radiales Strömungsprofil mit Wandgrenzschichten auf die Schallausbreitung hat. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen einer Diplomarbeit [1] ein allgemeiner Ansatz für die Beschreibung der Schallausbreitung in Strömungskanälen verfolgt. Die resultierende Differentialgleichung (siehe auch [2]) ist analytisch nicht komplett lösbar, kann aber mittels eines Separationsansatzes in ihre Abhängigkeit von der radialen, der axialen und der Umfangskoordinate zerlegt werden. Der modale Schalldruckverlauf senkrecht zur Rohrachse wird mit Hilfe numerischer Integrationsverfahren (z.B. Runge-Kutta) berechnet.

Die numerisch berechneten Druckprofilformen werden mit der analytischen Lösung ohne Berücksichtigung der Wandgrenzschichten verglichen.

Theoretische Grundlagen

Die allgemeine Wellengleichung für den Schalldruck mit Geschwindigkeitsgradienten in radialer Richtung lautet:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} - 2 \rho_0 c \frac{dM}{dr} \frac{\partial v_r}{\partial z} + M^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \Delta p = 0 \quad (1)$$

p bezeichnet den Wechselanteil des Schalldrucks, v_r die radiale Schallschnelle, t die Zeit, z die axiale Koordinate, r die radiale Koordinate, c die Schallgeschwindigkeit, M die Machzahl, ρ_0 die Dichte und Δ den Laplace-Operator.

Gleichung (1) beschreibt die akustische Wellenausbreitung in zylindrischen oder koaxialen Strömungskanälen. Diese Wellengleichung findet sich in der Literatur u.a. bei Mungur und Plumblee [2]. Sie gilt bei rein radialem Strömungsprofil unter den Annahmen von Inkompressibilität, adiabaten

Zustandsänderungen und vernachlässigbaren Temperaturgradienten.

Für ein von der radialen Koordinate r unabhängiges, gleichförmiges Strömungsprofil $M(r) = M_\infty$ verschwindet der dritte Term aus Gleichung (1). Die verbleibende Wellengleichung für den Schalldruck p ist eine partielle Differentialgleichung, die mittels des Ansatzes

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^{\pm} \tilde{p}_{mn}(r) e^{ik_{zmn}^{\pm} z} \cdot e^{im\theta} e^{-i\omega t} \quad (2)$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung in r , Gleichung (3), umgeformt werden kann. Gleichung (2) bildet die Summe aller existierenden analytischen Lösungen für Gleichung (1). Jede einem Zahlenpaar (m,n) zugeordnete Einzellösung von (1) wird als Mode bezeichnet. Die Ordnungszahlen m und n stehen für die Anzahl der Maxima, die das zur Mode zugehörige Druckprofil in Umfangsrichtung (m) bzw. in radialer Richtung (n) aufweist. A_{mn}^{\pm} ist dabei die komplexwertige Amplitude der Mode, $\tilde{p}_{mn}(r)$ die unbekannte Profilform in radialer Richtung, k_{zmn}^{\pm} die axiale Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz.

Aus Übersichtsgründen wurden die Moden, die sich mit und gegen die Strömungsrichtung ausbreiten, in Gleichung (2) zu einem Term zusammengefasst. Variablen, die von der Strömungsrichtung abhängen, sind mit dem Index \pm markiert.

$$\frac{d^2 \tilde{p}_{mn}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{p}_{mn}(r)}{dr} + k_0^2 \left[(k_0 - Mk_{zmn})^2 - \frac{m^2}{r^2} - k_{zmn}^2 \right] \tilde{p}_{mn}(r) = 0 \quad (3)$$

Mit den entsprechenden Randbedingungen für schallharte Wände stellt die Gleichung (3) ein Eigenwertproblem dar. Die Lösung findet man z.B. in Bronstein [3]:

$$\tilde{p}_{mn}(r) = [J_m(\sigma_{mn} r/R) + Q_{mn} Y_m(\sigma_{mn} r/R)] \quad (4)$$

Es ist eine Überlagerung von Besselfunktion J_m und Neumannfunktion Y_m , wobei der Faktor Q_{mn} im Fall eines zylindrischen Rohres ohne Nabenkörper Null ist. R ist der Außenradius des Rohres.

Die axialen Wellenzahlen k_{zmn}^{\pm} lassen sich mit Hilfe von Gleichung (3) und den Randbedingungen berechnen.

Über einen Separationsansatz wird Gleichung (1) allgemein analog zum analytischen Fall in das Eigenwertproblem

$$\frac{d^2 \tilde{p}_{mn}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{2K}{1-M(r)K} \frac{dM}{dr} \right) \frac{d\tilde{p}_{mn}}{dr} + k_0^2 \left[(1-M(r)K)^2 - \frac{m^2}{r^2 k_0^2} - K^2 \right] \tilde{p}_{mn} = 0 \quad (5)$$

überführt. K ist hier die dimensionslose axiale Wellenzahl k_{zmn} / k_0 . Mit Hilfe eines zweimal stetig differenzierbaren

analytisch vorgegebenen Strömungsprofil $M(r)$ (das kann auch ein an experimentelle Daten angepasstes Polynom sein), lassen sich die Wellenzahlen k_{zmn}^{\pm} so numerisch bestimmen, dass die Lösungen von Gleichung (5), die radialen Druckprofile $\tilde{p}_{mn}(r)$, den Randbedingungen an den Rohrwänden genügen.

Numerisch berechnete Druckprofile

Zur Bestimmung des Einflusses der Wandgrenzschichten auf die Modenprofile wurde das analytisch differenzierbare Grenzschichtprofil

$$M(x) = \begin{cases} M_{\infty} & , \varepsilon \leq x < 1 - \delta & \text{(ausserhalb } \delta) \\ M_{\infty} \cdot \left(\frac{1-x}{\delta}\right)^N & , 1 - \delta \leq x \leq 1 - \varepsilon & \text{(innerhalb } \delta) \end{cases} \quad (6)$$

mit $N = 1/7$ gewählt. δ bezeichnet die Grenzschichtdicke. x ist die dimensionslose radiale Koordinate r/R . Das Profil beschreibt in guter Näherung eine turbulente Grenzschicht.

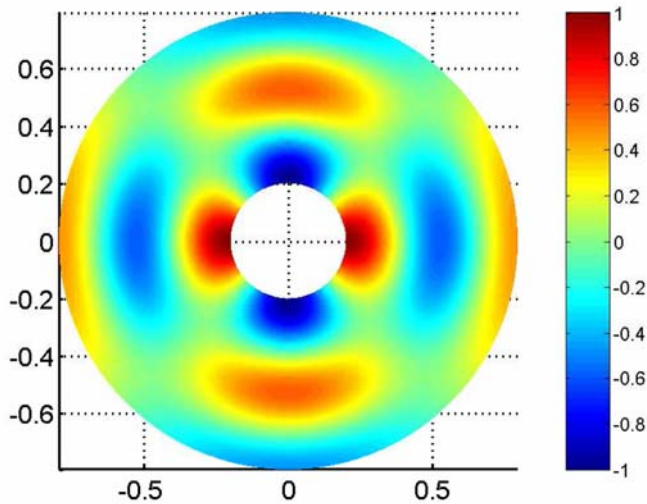


Abbildung 1: Schalldruckmuster der Mode (2,2) im Schnitt durch den Ringkanal ohne Grenzschicht: $k_0 R = 82.4$, $M_{\infty} = 0.3$.

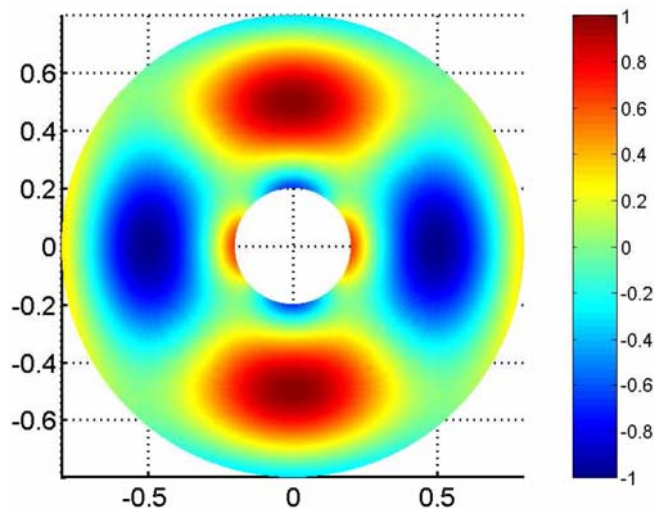


Abbildung 2: Schalldruckmuster der Mode (2,2) im Schnitt durch den Ringkanal mit Grenzschicht (typisches turbulentes Grenzschichtprofil): $\delta = 15\%$, $k_0 R = 82.4$, $M_{\infty} = 0.3$, Schallausbreitung in Strömungsrichtung.

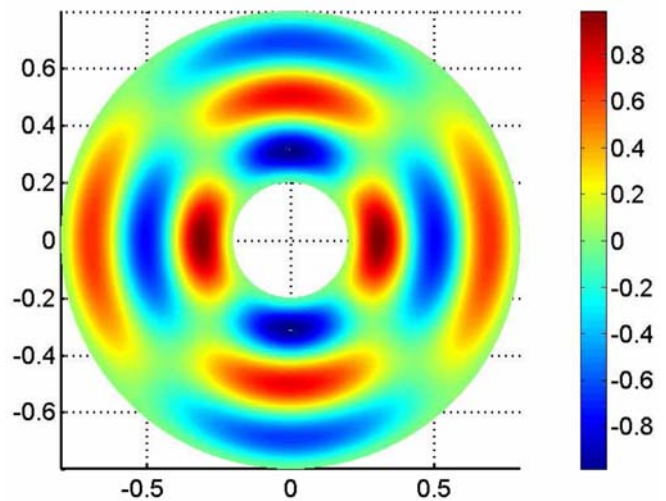


Abbildung 3: Schalldruckmuster der Mode (2,2) im Schnitt durch den Ringkanal mit Grenzschicht (typisches turbulentes Grenzschichtprofil): $\delta = 15\%$, $k_0 R = 82.4$, $M_{\infty} = 0.3$, Schallausbreitung gegen die Strömungsrichtung.

Abb. 1 zeigt das Schalldruckprofil der Mode (2,2), analytisch berechnet nach Gleichung (2) und (4) für eine sehr hoch gewählte dimensionslose Frequenz $k_0 R = 82.4$ und die Machzahl $M_{\infty} = 0.3$ im Ringkanal. Das Modenprofil ist identisch für Schallausbreitung in oder gegen die Strömungsrichtung. Abb. 2 zeigt das korrespondierende Modenprofil für 15% Grenzschichtdicke (die beiden Grenzschichten gemäß Gleichung (6) füllen zusammen 15% des Ringkanals) bei Schallausbreitung in Strömungsrichtung. In Abb. 3 ist die identische Modeordnung mit denselben Parametern für Schallausbreitung gegen Strömungsrichtung dargestellt.

Die extrem hoch gewählte Helmholtzzahl und das gewählte Beispiel Ringkanal (2 Wandgrenzschichten) verdeutlichen den Effekt der Grenzschichten auf die Schallausbreitung: Bei Schallausbreitung in Strömungsrichtung verschieben sich lokale Maxima und Minima radial zur Grenzschicht hin und bei Schallausbreitung gegen die Strömungsrichtung: radial von der Grenzschicht weg. Weitere Parameterstudien (hier aus Platzmangel nicht gezeigt) führten zu folgenden Ergebnissen für die Auswirkung der Grenzschichten:

- Aufweitung/Stauchung der Wellenberge und Wellentäler in/gegen die Strömungsrichtung.
- Starke Unterschiede zwischen Modenausbreitung in/gegen die Strömungsrichtung.
- Ab Modenordnungen von $n = 4$ vernachlässigbare Veränderungen gegenüber der analytischer Lösung.

Literatur

[1] O. Kornow: „Der Einfluss des radialen Strömungsprofils auf die Schallausbreitung von höheren Moden in zylindrischen und coaxialen Strömungskanälen“, Diplomarbeit, TU Berlin, November 2004

[2] P. Mungur, H. E. Plumbee: “Propagation and Attenuation of Sound in a soft-walled annular duct containing a sheared flow”, NASA SP, Bd. 207 S. 305–327, 1969

[3] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Nauka, Moskau und BSB B.G. Teuber Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987, 23. Aufl.